ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

PREMIERE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE V

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PARIS
HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА, 1959

АННОТАЦИЯ

Данная книга объединяет выпускн XV, XVIII и XIX известной монографии Н. Бурбаки „Элементы математики", составляющие единственное в мировой литературе руководство по общей теорни топологических векторных пространств.

Книга рассчнтана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и пединстнтутов, интересующихся функциональным анализом и топологией.

Редакция литературы по математическим наукам

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие переводчика 11

Способ пользования этим трактатом 17

Глава I. **Топологические векторные пространства над нормированным телом** 21

§ 1. Топологическне векторные пространства 21

1. Определение топологического векторного пространства 21
2. Нормнрованные пространства над нормированным телом . . . 23
3. Окрестности начала в топологнческом векторном пространстве над нормированным телом 25
4. Признаки непрерывности и равностепенной непрерывности . . 28
5. Равномерная структура н пополнение топологнческого векторного пространства 30
6. Векторные подпространства и факторпространства топологического векторного пространства 32
7. Произведение топологических векторных пространств 34
8. Топологнческая прямая сумма подпространств 35
9. Один метод топологизации векторных пространств 39

Упражнения 41

§ 2. Линейные многообразня в топологическом векторном пространстве 44

1. Замыкание лннейного многообразия 44
2. Прямые и замкнутые гиперплоскости 47
3. Конечномерные векторные подпространства 48
4. Локально компактные топологнческие векторные пространства 50

Упражнення 52

§ 3. Метризуемые топологическне векторные пространства 54

1. Окрестностн нуля в метрнзуемом топологическом векторном пространстве 54
2. Свойства метризуемых векторных пространств 56
3. Непрерывные лннейные функции на метризуемом векторном пространстве 56

Упражнення 60

Глава II. **Выпуклые множества и локально выпуклые пространства** 63

§ 1. Выпуклые множества 64

1. Определение выпуклого множества 64
2. Пересечения выпуклых множеств. Произведения выпуклых множеств 66

3. Выпуклая оболочка множества 67
4. Выпуклые конусы 68
5. Упорядоченные векторные пространства 71
6. Выпуклые множества в топологических векторных пространствах 73
Упражнения 75
§ 2. Локально выпуклые пространства 80
1. Определение локально выпуклого пространства 80
2. Два метода введения локально выпуклой топологии 82
3. Топологическая прямая сумма семейства локально выпуклых пространств 84
4. Индуктивные пределы локально выпуклых топологий 84
5. Строгий индуктивный предел последовательности подпространств 87
Упражнения 89
§ 3. Отделение выпуклых множеств 92
1. Теорема Хана — Банаха (геометрическая форма) 92
2. Отделение выпуклых множеств в топологических векторных пространствах 94
3. Отделение выпуклых множеств в локально выпуклом пространстве 96
4. Положительные линейные формы на упорядоченном векторном пространстве 99
Упражнения 100
§ 4. Компактные множества в топологических векторных пространствах 104
1. Выпуклые оболочки компактных множеств 104
2. Экстремальные точки компактных выпуклых множеств 105
Упражнения 110
§ 5. Полунормы 114
1. Определение выпуклой функции 114
2. Непрерывность выпуклых функций 116
3. Полунормы 118
4. Полунормы в локально выпуклых пространствах 120
5. Полунормы в факторпространствах и произведениях пространств 123
6. Полилинейные непрерывные отображения произведения локально выпуклых пространств в локально выпуклое пространство . . 124
7. Теорема Хана — Банаха (аналитическая форма) 126
Упражнения 127
§ 6. Комплексные локально выпуклые пространства 131
1. Топологические векторные пространства над C 131
2. Комплексные локально выпуклые пространства 133
3. Теорема Хана — Банаха 135
Упражнения 137
Прилоджение к главе II. Неподвижные точки компактных выпуклых множеств 139
Упражнения 141

Глава III. Пространства непрерывных линейных отображений . 143
§ 1. Бочечные пространства 143
1. Определение бочечного пространства 143
2. Свойства бочечных пространств 144
Упражнения 145
§ 2. Ограниченные множества в топологических векторных пространствах 146
1. Определение ограниченных множеств 146
2. Свойства ограниченных множеств 147
3. Образ при непрерывном отображении 149
4. Ограниченные множества в строгом индуктивном пределе . . . 151
5. Квазиполные пространства 152
Упражнения 153
§ 3. Пространства непрерывных линейных отображений 160
1. Пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 160
2. Условие отделимости пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 163
3. Связи между $L(E, F)$ и $L(\hat{E}, F)$ 163
4. Ограниченные множества в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 164
5. Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$ 166
6. Теорема Банаха — Штейнгауза 171
7. Полные множества в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 175
Упражнения 177
§ 4. Гипонепрерывные билинейные отображения 183
1. Раздельно непрерывные билинейные отображения 183
2. Гипонепрерывные билинейные отображения 184
3. Продолжение гипонепрерывного билинейного отображения . . 186
4. Гипонепрерывность отображения $(u, v) \to v \circ u$ 188
5. Равностепенно гипонепрерывные множества билинейных отображений 189
Упражнения 191

Глава IV. Двойственность в топологических векторных пространствах 195
§ 1. Слабые топологии 195
1. Векторные пространства в двойственности 195
2. Слабые топологии 197
3. Поляры 198
4. Ортогональные подпространства 201
5. Подпространства и факторпространства пространства, наделенного слабой топологией 201
6. Произведения слабых топологий 203
Упражнения 204
§ 2. Сопряженное к отделимому локально выпуклому пространству . . 211
1. Слабая и ослабленная топологии 211
2. Свойства слабого сопряженного 212
3. Топологии, согласующиеся с заданной двойственностью 215

4. Множества, ограниченные в ослабленной топологии 219
5. Характеризация слабо непрерывных линейных форм на сопряженном пространстве 220
6. Характеризация слабо замкнутых выпуклых множеств в сопряженном к пространству Фреше 222
7. Сопряженное к подпространству; сопряженное к факторпространству 224
8. Сопряженное к произведению 225
9. Сопряженное к пространству непрерывных линейных отображений 226
Упражнения 228
§ 3. Сильная топология в сопряженном к отделимому локально выпуклому пространству 235
1. Определение сильной топологии 235
2. Свойства сильного сопряженного 236
3. Второе сопряженное. Рефлексивные пространства 237
4. Монтелевские пространства 240
Упражнения 242
§ 4. Сильная и слабая непрерывность 251
1. Сопряженное к слабо непрерывному линейному отображению 251
2. Слабая и сильная непрерывность 254
Упражнения 257
§ 5. Двойственность банаховских пространств 262
1. Слабая и сильная топологии в сопряженном к нормированному пространству 262
2. Второе сопряженное к нормированному пространству. Рефлексивные банаховские пространства 265
3. Непрерывные линейные отображения нормированного пространства в локально выпуклое пространство 267
4. Сопряженное к подпространству и факторпространству нормированного пространства 268
Упражнения 270
Глава V. **Гильбертовы пространства (элементарная теория)** . . . 279
§ 1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства 279
1. Эрмитовы формы 279
2. Положительные эрмитовы формы 281
3. Предгильбертовы и гильбертовы пространства 283
4. Выпуклые множества в предгильбертовом пространстве 285
5. Векторные подпространства и проекторы 289
6. Сопряженное к гильбертову пространству 291
Упражнения 293
§ 2. Ортогональные семейства в гильбертовом пространстве 301
1. Внешняя гильбертова сумма гильбертовых пространств 301
2. Гильбертова сумма ортогональных подпространств гильбертова пространства 303

3. Ортонормальные семейства 307
4. Ортонормализацня 309
Упражнения 311
Исторический очерк (к главам I—V) 318
Библиография 332
Сводка результатов 334
Введенне 334
§ 1. Топологнческие векторные пространства; окрестности, полунормы, ограниченные множества 334
Топологические векторные пространства 334
Локально выпуклые пространства 336
Ограниченные множества 337
§ 2. Линейные и полилиинейные отображения 339
Непрерывные линейные отображения 339
Гомоморфизмы 340
Билинейные отображения 341
§ 3. Подпространства; факторпространства; произведения; прямые суммы 343
Подпространства 343
Факторпространства 344
Пронзведенння топологических векторных пространств 344
Конечные прямые суммы 345
Различные способы введения топологии 347
Гильбертова сумма гильбертовых пространств 348
§ 4. Выпуклость 349
Выпуклые множества 349
Отделенне выпуклых множеств 350
Компактные выпуклые множества 351
Проекцня на выпуклое множество в предгильбертовом пространстве 352
Выпуклые функции 352
Конусы 353
§ 5. Пространства непрерывных линейиых отображеиий 354
$\mathfrak{S}$-топологин в $L(E, F)$ 354
Ограниченные множества в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 355
Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$ 356
§ 6. Двойственность 357
Векторные пространства в двойственности 357
Поляры 358
Подпространства, факторпространства, произведения 358
Топологни, согласующиеся с двойственностью 359
Сильное сопряженное 360
Сопряженное отображение 361
§ 7. Основные типы локально выпуклых пространств 361
Бочечные пространства 361
Монтелевские пространства 363

Пространства Фреше 363
Банаховские пространства 364
Гильбертово пространство 365

Прнложенне к Сводке результатов. Некоторые топологические векторные пространства функционального анализа 368

Словарь 369

Приложение I. Перевод некоторых мест из другнх книг „Элементов математикн" Н. Бурбакн, на которые имеются ссылки в этой книге . 380

Приложение II. Объяснение обозначеннй, заимствованных из других книг „Элементов математики" Н. Бурбаки 392

Приложение III. Объяснение терминов, заимствованных нз других книг „Элементов математики" Н. Бурбаки 394

Указатель обозначеннй 402
Указатель терминов 403

Определение и аксиомы главы I . . . . . вклейка 1
Определения главы II . . . . . вклейка 2
Определения главы III . . . . . вклейка 3
Определения главы IV . . . . . вклейка 4
Днаграмма различных типов топологических векторных пространств . . . . . вклейка 5

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Государственное издательство физико-математической литературы и Издательство иностранной литературы приступили к переводу на русский язык известного трактата Н. Бурбаки „Элементы математики". Все появившиеся до сих пор выпуски этого трактата относятся к первой его части, озаглавленной „Фундаментальные структуры анализа" и распадающейся на следующие шесть книг:

Книга I „Теория множеств",
Книга II „Алгебра",
Книга III „Общая топология",
Книга IV „Функции одной вещественной переменной",
Книга V „Топологические векторные пространства",
Книга VI „Интегрирование".

В совокупности эти книги должны дать теоретико-множественную аксиоматическую основу для построения всей современной математики*). Из них закончены пока книги III, IV и V. Книга III издается в русском переводе (тремя отдельными выпусками) Физматгизом. Настоящее же издание содержит всю книгу V (вышедшую во французском издании тремя отдельными выпусками, из которых первый, появившийся в 1953 г., содержал главы I—II, второй, появившийся в 1955 г., — главы III—V и словарь, а третьим был „выпуск результатов", также вышедший в 1955 г.). При переводе учтены исправления к этой книге, приложенные к дальнейшим выпускам трактата Бурбаки, и выправлены также другие замеченные опечатки.

Среди книг „Элементов математики" Н. Бурбаки книга V „Топологические векторные пространства", несомненно, выделяется насыщенностью новыми результатами (полученными в большинстве уже после войны) и, если можно так выразиться, особой злободневностью. Объясняется это чрезвычайной быстротой развития

*) См. „Способ пользования этим трактатом", стр. 17.

теории топологических линейных пространств в последние годы и важной ролью, которую в этом развитии сыграла школа Бурбаки.

Общее понятие топологического линейного пространства и несколько более специальное (но единственно важное пока для анализа) понятие локально выпуклого пространства были введены А. Н. Колмогоровым, А. Н. Тихоновым и И. фон Нейманом в 1934—1935 гг. Но вплоть до конца тридцатых годов главным предметом теории топологических линейных пространств все еще продолжали оставаться нормированные пространства; однако интерес все больше концентрировался на изучении их слабой топологии. Последнее объяснялось тем, что лишь в терминах слабой топологии (а не одной только слабой сходимости последовательностей) оказалось возможным правильно ставить и решать задачи теории двойственности для произвольных (не обязательно сепарабельных) нормированных пространств. Отсюда оставался лишь один шаг до исследования слабой топологии любых локально выпуклых пространств. Этот шаг сделали В. Л. Шмульян (1940) и Ж. Дьедонне (1942). Последний *) построил полную теорию *слабой* двойственности линейных пространств, почти имитировавшую теорию двойственности для конечномерного, т. е. чисто алгебраического, случая. Существенно дальше продвинулся В. Л. Шмульян. Его работа „О линейных топологических пространствах“ **) содержала уже, хотя и в недостаточно развернутом еще виде, основной результат *общей* теории двойственности локально выпуклых пространств. Война прервала исследования В. Л. Шмульяна, а в 1944 г. он погиб на фронте. Окончательную форму упомянутому результату В. Л. Шмульяна придал Макки ***) в своих работах 1945—1946 гг. ****). Эти работы, содержавшие также другие важные результаты и понятия, знаменовали уже полное преодоление общей теорией рамок нормированных пространств.

Но новые рамки — общих локально выпуклых пространств — были еще слишком широки, и вряд ли теория топологических

*) J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. École Norm. (3), т. 59 (1942), стр. 107—139.

**) V. Šmulian, Über lineare topologische Räume, Мат. сборн., нов. сер., т. 7 (1940), стр. 425—448.

***) См. гл. IV, § 2, n° 3.

****) См. библиографию к Историческому очерку, XIV а) и б).

линейных пространств так быстро развивалась бы дальше, не получи она мощного импульса извне, давшего также надежный компас для выбора перспективных направлений исследования и разумной специализации понятий. Этот импульс был дан теорией „распределений" (обобщенных функций) Л. Шварца *). Возникновение этой теории (окончательно оформленной и систематически разработанной Л. Шварцем) отвечало назревшей потребности математического анализа в возможно более широких функциональных пространствах, где свободно действовали бы дифференциальные операторы, т. е. в различных пространствах бесконечно дифференцируемых функций и сопряженных к ним пространствах обобщенных функций. Однако эти пространства ненормируемы и большей частью даже неметризуемы (как, например, пространства „финитных" функций и „распределений" Л. Шварца). Это сделало совершенно очевидной недостаточность и стеснительность старых банаховских рамок и важность более общих концепций также — и прежде всего — для новых *приложений* функционального анализа и дало мощный толчок развитию общей теории топологических линейных пространств, совершенно изменившему лицо этой теории.

На этом этапе, во всяком случае вплоть до 1955 года, когда было завершено французское издание настоящей книги, ведущая роль в разработке теории топологических линейных пространств, безусловно, принадлежит математикам школы Бурбаки. Достаточно указать основоположные работы Ж. Дьёдонне и Л. Шварца „Двойственность в пространствах ($\mathscr{F}$) и ($\mathscr{LF}$)" **), Н. Бурбаки „О некоторых топологических векторных пространствах" ***) и А. Гротендика „О пространствах ($\mathscr{F}$) и ($\mathscr{DF}$)" ****); особо следует отметить также фундаментальную монографию А. Гротендика „Топологические

*) См. библиографию к Историческому очерку, XVI.

**) J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{LF}$), Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. I (1950), стр. 61—101. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 77—107.

***) N. Bourbaki, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), т. 2 (1951), стр. 5—16. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 2 (1958), стр. 109—117.

****) A. Grothendieck, Sur les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{DF}$), Summa Brasiliensis Mathematicae, т. 3, вып. 6 (1954), стр. 57—123. Русск. перевод: Математика, т. 2, вып. 3 (1958), стр. 81—127.

тензорные произведения и ядерные пространства" *), влияние которой только начинает еще сказываться.

Все это и наложило на рассматриваемую книгу трактата Бурбаки печать особой оригинальности и злободневности. Вместе с тем эта книга до сих пор играет роль единственного руководства, по которому можно изучить основы современной теории топологических линейных пространств. Но нужно при этом иметь в виду, что эта книга — вовсе не учебник в обычном смысле и даже не специальная монография: она является органической частью трактата Бурбаки, всецело подчиненной общему его замыслу и плану. По-видимому, именно этим объясняется, например, то, что в ней совершенно не отражены исследования А. Гротендика по тензорным произведениям локально выпуклых пространств и ядерным пространствам. Однако каждый изучивший эту книгу сможет уже свободно читать литературу по любым специальным вопросам теории топологических линейных пространств.

Являясь пятой книгой трактата Н. Бурбаки, книга „Топологические векторные пространства" содержит многочисленные ссылки на предшествующие книги трактата; кроме того, в ней широко используются, без специальных пояснений, введенные там обозначения и термины. Ввиду этого пришлось снабдить перевод книги тремя приложениями. Первое из них содержит, в виде примечаний, перевод тех, существенных для понимания текста книги, мест из других книг трактата, на которые имеются ссылки. Во втором приложении дано разъяснение стандартных обозначений, заимствованных из других книг трактата. Наконец, третье приложение представляет собой толковый словарь, где в алфавитном порядке расположены в основном те (взятые из других книг трактата) термины, которые либо присущи только языку этого трактата, либо приобрели в этом языке не совсем общепринятый смысл. Ввиду перенасыщенности трактата Бурбаки своей особой терминологией, читателю, еще не знакомому с ней, пожалуй, следовало бы хотя бы бегло просмотреть это приложение, прежде чем приступать к чтению самой книги. Не менее полезно было бы предварительно ознакомиться со свод-

---

*) A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs of the American Mathematical Society, n° 16 (1955).

кой результатов к книге I „Теория множеств", помещенной в качестве приложения к русскому переводу первых трех глав книги III „Общая топология", особенно с § 8 этой сводки, посвященным понятию „структуры", играющему центральную роль в концепции математики у Бурбаки.

Наконец, отошлем читателя также к „Способу пользования этим трактатом", содержащему ряд авторских указаний, обращенных к читателю трактата и касающихся различных вопросов — от общей характеристики трактата до описания особенностей редакционного оформления, общих для всех его книг.

Д. А. Райков

СПОСОБ ПОЛЬЗОВАНИЯ ЭТИМ ТРАКТАТОМ

1. В этом трактате математика рассматривается с самых ее начал и даются полные доказательства. Таким образом, его чтение не предполагает, в принципе, никаких специальных математических знаний; требуется лишь некоторый навык в математических рассуждениях и известная способность к абстракции.

Тем не менее трактат предназначен главным образом для читателей, обладающих хорошим знанием хотя бы материала, преподаваемого во Франции в общем курсе математики (а в других странах — на первом или двух первых годах обучения в университете), и, если возможно, некоторым знакомством с основными разделами курса дифференциального и интегрального исчисления.

2. Первая часть трактата посвящена фундаментальным структурам Анализа (по поводу смысла слова „структура“ см. Книгу I, гл. 4); в каждой из книг, на которые распадается эта часть, изучается одна из этих структур или несколько структур, тесно связанных друг с другом (Книга I, Теория множеств; Книга II, Алгебра; Книга III, Общая топология; следующие книги: Функции вещественной переменной; Топологические векторные пространства; Интегрирование).

Общие принципы, изучаемые в первой части, найдут, в последующих частях, применение к теориям, в которых одновременно участвуют различные структуры.

3. Способ изложения, принятый в первой части, — аксиоматический и абстрактный, чаще всего идущий от общего к частному. Выбор такого метода определяется основной целью этой первой

принципов. К тому же нужды доказательств требуют, чтобы главы, книги и части следовали в строго фиксированном логическом порядке. Поэтому польза некоторых рассмотрений будет ясна читателю, лишь если он уже обладает довольно обширными знаниями либо имеет терпение отложить суждение до тех пор, пока не получит наконец возможность убедиться в ней.

4. Чтобы устранить в какой-то мере это неудобство, среди текста довольно часто вставляются примеры, относящиеся к фактам, которые хотя и могут быть уже известны читателю, однако еще не изложены в этом трактате; такие примеры всегда выделяются значками $^{\circ}\ldots_{\circ}$. Большинство читателей, несомненно, найдет, что эти примеры облегчают им понимание текста, и предпочтет не пропускать их даже при первом чтении; тем не менее такой пропуск, разумеется, не вызовет в логическом отношении никаких неудобств.

5. Читатель может пожелать иногда составить себе общее представление о какой-либо книге трактата в целом, прежде чем приступать к подробному ее изучению. Эту задачу облегчат ему *сводки результатов*, приложенные, как правило, к каждой книге и предназначенные также для читателей, спешащих как можно быстрее перейти к изучению специальных проблем. Эти сводки содержат, насколько это возможно, все существенно необходимое для изучения последующих частей.

6. Логический остов каждой главы составляют *определения*, *аксиомы* и *теоремы* этой главы; именно это главным образом необходимо удерживать в памяти для дальнейшего. Результаты менее важные или те, которые легко можно восстановить на основании теорем, фигурируют под наименованием „предложений“, „лемм“, „следствий“, „замечаний“ и т. д.; те из них, которые можно пропустить при первом чтении, напечатаны мелким шрифтом. Под названием „Схолия“ дается иногда комментарий к особо важной теореме.

Во избежание скучных повторений иногда вводятся те или иные обозначения или сокращения, действительные лишь в пределах одной главы или параграфа (например, в главе, где рассматриваются лишь коммутативные кольца, под словом „кольцо“ понимается всюду „коммутативное кольцо“). Такого рода соглашения всегда

явно оговариваются, как правило, в начале той главы, где они применяются.

7. Некоторые места имеют своей целью предостеречь читателя от серьезной ошибки, в которую он рискует впасть; эти места отмечены на поле знаком **Z** („опасного поворота").

8. *Упражнения* предназначены, с одной стороны, для того, чтобы дать возможность читателю удостовериться в правильном усвоении им текста, а с другой — чтобы познакомить его с результатами, не нашедшими места в тексте, но тем не менее представляющими свой интерес. Они могут быть опущены при первом чтении, но изучающему рекомендуется решить их хотя бы при втором чтении. Наиболее трудные из них отмечены звездочкой.

9. Терминология, принятая в этом трактате, была предметом особого внимания. *Были приложены старания никогда не отклоняться от установившейся терминологии без весьма серьезных на то оснований.* Не только каждый выпуск снабжается подробным *указателем*, но и каждая книга сопровождается *словарем*, где разъясняются и обсуждаются, помимо терминов, употребляемых в этом трактате, также соответствующие термины, применяемые в настоящее время в основных западноевропейских языках. Тем самым этот словарь поможет читателю трактата обратиться к изучению оригинальных мемуаров на этих различных языках, а математикам, привыкшим к другой терминологии, скорее освоиться с принятой в этом трактате.

10. Приложены старания, не жертвуя простотой изложения, всюду пользоваться выдержанно точным языком. Поскольку это возможно, *вольности речи*, без которых любой математический текст рисковал бы стать педантичным и даже неудобочитаемым, каждый раз оговариваются; если это уместно, они отмечаются в указателе или словаре.

11. Поскольку текст книги посвящен, как правило, догматическому изложению теории, библиографические ссылки встречаются в нем лишь в виде исключения; ссылки на библиографию вопроса собраны

в *историческом очерке*, помещаемом чаще всего *в конце каждой главы* и содержащем также, если к этому представляется случай, указание нерешенных проблем теории. При этом ссылки даются лишь на те книги и оригинальные мемуары, изучение которых было бы наиболее полезно для читателя. Ссылки, имеющие своей единственной целью установление приоритета, почти всегда отсутствуют; тем более читатель не должен рассчитывать найти здесь полную библиографию рассматриваемых вопросов.

Что касается упражнений, не было вообще сочтено полезным указывать их источники, которые весьма различны (оригинальные мемуары, учебные руководства, сборники упражнений).

12. Порядок ссылок на то или иное место трактата таков:

а) при ссылке на теоремы, аксиомы или определения, приведенные *в том же самом параграфе*, называется, если он имеется, их номер;

б) если они приведены *в другом параграфе той же главы*, указывается, кроме того, этот параграф;

в) если они приведены *в другой главе той же книги*, указываются соответствующие глава и параграф;

г) если они находятся *в другой книге*, сначала дается название этой книги.

Сводки результатов указываются при ссылках буквами „Рез.“: например, „Теор. мн., Рез.“ означает „Сводка результатов Теории множеств“.

13. Каждый раз, когда читателю было бы полезно иметь перед глазами при чтении всего выпуска те или иные аксиомы, определения и т. п., последние воспроизводятся на *вклейке*, помещаемой в конце этого выпуска (и упоминаемой в его оглавлении).

ГЛАВА I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НАД НОРМИРОВАННЫМ ТЕЛОМ

§ 1. Топологические векторные пространства

1. Определение топологического векторного пространства

Определение 1. *Пусть K — топологическое тело* (Общ. топ., гл. III, § 5, n° 5). *Топологическим левым векторным пространством над K называют множество E, наделенное*:

1° *структурой левого векторного пространства над K*;

2° *топологией, согласующейся со структурой аддитивной группы в E* (Общ. топ., гл. III, § 1, n° 1) *и удовлетворяющей, кроме того, следующей аксиоме*:

(EVT) *Отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $K \times E$ в E непрерывно.*

Пусть в множестве E заданы структура левого векторного пространства относительно K и топология. Говорят, что они *согласуются*, если топология согласуется со структурой аддитивной группы в E и, кроме того, выполнена аксиома (EVT). То же самое можно выразить, сказав, что отображения $(x, y) \to x + y$ и $(\lambda, x) \to \lambda x$ соответственно произведений $E \times E$ и $K \times E$ в E непрерывны, ибо это влечет непрерывность отображения $x \to -x = (-1)x$ и тем самым согласованность топологии в E со структурой аддитивной группы.

Примеры. 1) Если E — левое векторное пространство над *дискретным* топологическим телом K, то *дискретная* топология в E согласуется со структурой векторного пространства в E (что уже неверно, если K недискретно, а E не сводится к 0).

2) Пусть A — топологическое кольцо (Общ. топ., гл. III, § 5, n° 1) и K — его подтело, имеющее с A общий единичный элемент и такое, что топология, индуцируемая в K топологией кольца A, согласуется со структурой тела в K. Тогда в A топология согласуется со структурой левого векторного пространства над K.

3) Пусть K — любое топологическое тело, I — любое множество. В векторном пространстве K_s^I (Алг., гл. II, § 1, n° 4) произведение топологий сомножителей K_s согласуется со структурой векторного пространства, ибо оно согласуется со структурой произведения

(аддитивных) групп и для каждого $x = (\xi_\iota)$ из K_s^I и каждого $\lambda \in K$ имеем $\lambda x = (\lambda\xi_\iota)$, откуда сразу следует (Общ. топ., гл. I, § 8, следствие 2 теоремы 1), что отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ непрерывно. Можно также сказать, что пространство K_s^I всех отображений I в K, наделенное топологией *простой сходимости*, есть топологическое векторное пространство над K (Общ. топ., гл. X, § 1, n° 3).

4) Пусть X — отделимое топологическое пространство. В множестве $E = \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(X)$ всех *непрерывных* числовых функций, определенных на X, топология *компактной сходимости* (Общ. топ., гл. X, § 1, n° 3) согласуется со структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$. Действительно, пусть u_0 — точка из E, H — компактное множество в X и ε — произвольное положительное число. Числовая функция u_0 ограниченна на H; пусть $a = \sup_{t \in H} |u_0(t)|$. Для любой точки u из E и любого $t \in H$ имеем

$$|\lambda u(t) - \lambda_0 u_0(t)| \leqslant |\lambda| \cdot |u(t) - u_0(t)| + a|\lambda - \lambda_0|.$$

Если, следовательно, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$ и $|u(t) - u_0(t)| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in H$, то $|\lambda u(t) - \lambda_0 u_0(t)| \leqslant \varepsilon(a + |\lambda_0| + \varepsilon)$; тем самым аксиома (EVT) выполнена. Так же проверяется согласованность топологии компактной сходимости со структурой аддитивной группы в E.

Напротив, если X некомпактно, топология *равномерной сходимости* (на X) не обязательно согласуется со структурой векторного пространства в E. Например, если $X = \mathbf{R}$ и u_0 — неограниченная непрерывная функция на $\mathbf{R}$, то $\lambda \to \lambda u_0$ не будет непрерывным отображением $\mathbf{R}$ в E, наделенное топологией равномерной сходимости.

Так же, как в определении 1, вводится топологическое *правое* векторное пространство над топологическим телом K. Но каждое правое векторное пространство над K можно рассматривать как левое векторное пространство над телом K°, противоположным K (Алг., гл. II, § 1, n° 1), а топология в K согласуется со структурой тела K°. По этой причине мы, как правило, рассматриваем левые топологические векторные пространства; и говоря просто „топологическое векторное пространство", мы всегда подразумеваем, что это векторное пространство — левое.

Пусть K' — подтело тела K и E — топологическое векторное пространство над K. Ясно, что топология в E согласуется также со структурой векторного пространства относительно K', получающейся в E при сужении тела скаляров до K'. Мы будем называть получающееся так топологическое векторное пространство E над K' *базисным* для топологического векторного пространства E над K.

Для того чтобы топологическое векторное пространство E было *отделимым*, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки

$x \neq 0$ из E существовала окрестность нуля, не содержащая x (Общ. топ., гл. III, § 1, следствие предложения 2).

Рассмотрим в векторном пространстве E относительно топологического тела K топологию, согласующуюся со структурой аддитивной группы в E. В силу тождества

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

аксиома (EVT) равносильна системе следующих трех аксиом:

$(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}})$ *Отображение* $\lambda \to \lambda x_0$ *непрерывно в точке* $\lambda = 0$ *для любого* $x_0 \in E$.

$(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}})$ *Отображение* $x \to \lambda_0 x$ *непрерывно в точке* $x = 0$ для *любого* $\lambda_0 \in K$.

$(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}})$ *Отображение* $(\lambda, x) \to \lambda x$ *непрерывно в точке* $(0, 0)$.

В частности:

Предложение 1. *Для каждого* $a \in K$ *и каждой точки* $b \in E$ *преобразование подобия* $x \to ax + b$ *пространства* E *в себя непрерывно. Если при этом* $a \neq 0$, *то это преобразование есть гомеоморфизм пространства* E *на себя.*

Вторая часть предложения есть следствие того, что отображение $x \to ax + b$ при $a \neq 0$ допускает обращение $x \to a^{-1}x - a^{-1}b$.

Следствие. *Если* A — *открытое* (*замкнутое*) *множество в* E, *то* aA *открыто* (*замкнуто*) *в* E *для каждого* $a \neq 0$ *из* K.

Пусть E и F — топологические векторные пространства над одним и тем же топологическим телом K. Для того чтобы взаимно однозначное отображение E на F было *изоморфизмом* топологического векторного пространства E на топологическое векторное пространство F, необходимо и достаточно, чтобы это отображение было *линейно* и *взаимно непрерывно*. В частности, если $\gamma \neq 0$ принадлежит *центру* тела K, то гомотетия $x \to \gamma x$ является *автоморфизмом* структуры топологического векторного пространства в E.

2. Нормированные пространства над нормированным телом

Напомним (Общ. топ., гл. IX, § 3, п° 2), что *норма* (*абсолютная величина*) на теле K есть отображение $\xi \to |\xi|$ его в $\mathbf{R}_+$ такое, что $|\xi| = 0$ равносильно $\xi = 0$, $|\xi\eta| = |\xi| \cdot |\eta|$ и $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$.

Норма определяет в K расстояние $|\xi - \eta|$ и, следовательно, отделимую топологию, согласующуюся со структурой тела в K. Если $|\xi| = 1$ для всех $\xi \neq 0$, то норма называется *несобственной* и ею определяется в K *дискретная* топология. Напротив, если в K существует $\alpha \neq 0$ такое, что $|\alpha| \neq 1$, то в K существует $\beta \neq 0$ с $|\beta| < 1$ (достаточно взять $\beta = \alpha$ или $\beta = \alpha^{-1}$) и последовательность $(\beta^n)_{n \geqslant 1}$ сходится к нулю, так что топология в K — недискретная.

Напомним, с другой стороны (Общ. топ., гл. IX, § 3, n° 3), что *норма* на векторном пространстве E над *недискретным* нормированным телом K есть отображение $x \to \|x\|$ этого пространства E в $\mathbf{R}_+$ такое, что $\|x\| = 0$ равносильно $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для каждого скаляра $\lambda \in K$ и $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Норма определяет в E расстояние $\|x - y\|$ и, следовательно, топологию, согласующуюся со структурой векторного пространства в E (см. там же). *Всюду, где не оговорено противное*, нормированное пространство будет предполагаться наделенным структурой топологического векторного пространства, определяемой его нормой. Нормированные пространства являются одними из наиболее важных топологических векторных пространств.

Как известно (Общ. топ., гл. IX, § 3), две различные нормы на E могут определять в E одну и ту же топологию, для чего необходимо и достаточно, чтобы они были *эквивалентны* (там же, предложение 7). Таким образом, структура нормированного пространства богаче структуры топологического векторного пространства. Следует тщательно отличать понятие изоморфизма структуры нормированного пространства в E на такую же структуру в F от понятия изоморфизма структуры топологического векторного пространства в E на такую же структуру в F.

Пример. Пусть I — произвольное множество индексов. В множестве $\mathscr{B}_K(I)$ всех его ограниченных отображений $x = (\xi_\iota)$ в K (обозначаемом также $L^\infty_K(I)$) можно ввести норму $\|x\| = \sup_{\iota \in I} |\xi_\iota|$ (Общ. топ., гл. X, § 1, n° 6). Если I — топологическое пространство, то множество $\mathscr{C}^\infty_K(I)$ всех непрерывных ограниченных отображений I в K есть замкнутое подпространство пространства $\mathscr{B}_K(I)$ (Общ. топ., гл. X, § 2, n° 1). Другое подпространство в $\mathscr{B}_K(I)$ образует множество $L^1_K(I)$ всех *абсолютно суммируемых* семейств $x = (\xi_\iota)$ (Общ. топ., гл. IX, § 3, n° 6); на этом подпространстве можно ввести также норму $\|x\|_1 = \sum_{\iota \in I} |\xi_\iota|$, вообще не эквивалентную норме $\|x\| = \sup_{\iota \in I} |\xi_\iota|$ (упражнение 8); если $L^1_K(I)$ рассматривается как нормированное пространство, но норма

не указана, то всегда имеется в виду норма $\|x\|_1$. Вместо $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}(I)$ и $L^1_{\mathbf{R}}(I)$ мы пишем $\mathscr{B}(I)$ и $L^1(I)$.

3. Окрестности начала в топологическом векторном пространстве над нормированным телом

Определение 2. *Пусть K — недискретное нормированное тело, E — левое векторное пространство над K. Множество $M \subset E$ называется уравновешенным, если $\lambda x \in M$ для каждого $x \in M$ и каждого $\lambda \in K$ с $|\lambda| \leqslant 1$* (или, другими словами, $\lambda M \subset M$ при $|\lambda| \leqslant 1$).

В том случае, когда K есть тело $\mathbf{C}$ комплексных чисел, мы вместо „уравновешенное множество" говорим также „диск".

Предложение 2. *В топологическом векторном пространстве E над недискретным нормированным телом K замыкание $\overline{M}$ уравновешенного множества M есть уравновешенное множество.*

Действительно, пусть B — замкнутый шар $|\xi| \leqslant 1$ в K. Непрерывная функция $(\lambda, x) \to \lambda x$ отображает $B \times M$ в M и, следовательно, $B \times \overline{M}$ в $\overline{M}$ (Общ. топ., гл. I, § 4, предложение 1), чем уравновешенность множества $\overline{M}$ и доказана.

Пусть M — любое непустое множество в векторном пространстве E над недискретным телом K. Очевидно, множество M_1 всех элементов вида λx, где x пробегает M, а λ — шар $|\lambda| \leqslant 1$ из K, есть наименьшее уравновешенное множество, содержащее M; оно называется *уравновешенной оболочкой* множества M.

Предложение 3. *Пусть K — недискретное локально компактное нормированное тело и E — отделимое топологическое векторное пространство над K. Уравновешенная оболочка каждого компактного множества H из E компактна.*

Действительно, пусть B — шар $|\xi| \leqslant 1$ в K. Уравновешенная оболочка множества H есть образ произведения $B \times H$ при непрерывном отображении $(\lambda, x) \to \lambda x$ и, следовательно, компактна, поскольку B и H компактны по предположению.

Отметим, что уравновешенная оболочка замкнутого множества не обязательно замкнута. Так, например, в $\mathbf{R}^2$ уравновешенная оболочка гиперболы, определяемой уравнением $xy = 1$, незамкнута.

Предложение 4. *Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным нормированным телом K и $\mathfrak{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в E. Множество $\mathfrak{B}_1$ уравновешенных оболочек множеств из $\mathfrak{B}$ также есть фундаментальная система окрестностей нуля в E.*

Действительно, из $(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{III}})$ следует, что для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ существуют число $\alpha > 0$ и окрестность $W \in \mathfrak{B}$ такие, что $\lambda x \in V$, когда $|\lambda| \leqslant \alpha$ и $x \in W$. Пусть U — объединение всех множеств λW с $|\lambda| \leqslant \alpha$. Так как K недискретно, то существует $\mu \in K$ такое, что $|\mu| \leqslant \alpha$ и $\mu \neq 0$; следовательно, $\mu W \subset U$, чем доказано, что U — окрестность нуля, притом, очевидно, уравновешенная. С другой стороны, $U \subset V$, и так как U — окрестность нуля, то существует $T \in \mathfrak{B}$, содержащееся в U; но U — уравновешенное множество, поэтому уравновешенная оболочка T_1 множества T содержится в U и тем более в V, чем предложение и доказано.

Определение 3. *Пусть K — недискретное нормированное тело, E — левое векторное пространство над K, A и B — множества из E. Говорят, что A поглощает B, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda A \supset B$, когда $|\lambda| \geqslant \alpha$* (или, что равносильно этому, $\mu B \subset A$, когда $\mu \neq 0$ и $|\mu| \leqslant \alpha^{-1}$). *Множество A из E называют поглощающим, если оно поглощает каждое одноточечное множество.*

Пусть A — уравновешенное множество из E; для того чтобы оно поглощало множество B из E, достаточно существования $\lambda \in K$ такого, что $\lambda A \supset B$. Действительно, пусть $|\mu| \geqslant |\lambda|$; так как $\lambda A = (\lambda \mu^{-1}) \mu A$, μA уравновешенно и $|\lambda \mu^{-1}| \leqslant 1$, то $\lambda A \subset \mu A$, откуда и $B \subset \mu A$. В частности, для того чтобы уравновешенное множество A из E было поглощающим, необходимо и достаточно, чтобы в K для каждого $x \in E$ существовало $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda x \in A$. Каждое поглощающее множество в векторном пространстве E *порождает* это пространство.

Из аксиомы $(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}})$ сразу следует, что в топологическом векторном пространстве над недискретным нормированным телом каждая окрестность нуля — поглощающая. Более точно, имеет место следующее предложение:

Предложение 5. *В топологическом векторном пространстве E над недискретным нормированным телом K существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ замкнутых окрестностей нуля такая, что*:

(EV_I) *Каждое $V \in \mathfrak{B}$ есть уравновешенное поглощающее множество.*

(EV_{II}) *Каковы бы ни были $V \in \mathfrak{B}$ и $\lambda \neq 0$ из K, $\lambda V \in \mathfrak{B}$* (инвариантность $\mathfrak{B}$ относительно гомотетий с ненулевым коэффициентом).

(EV_{III}) *Для каждого $V \in \mathfrak{B}$ существует $W \in \mathfrak{B}$ такое, что $W + W \subset V$.*

Обратно, если в векторном пространстве E над K имеется базис фильтра $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий условиям (EV_I), (EV_{II}) *и* (EV_{III}), *то в E существует (и притом только одна) топология, согласующаяся со структурой векторного пространства и имеющая $\mathfrak{B}$ фундаментальной системой окрестностей нуля.*

1° Предложения 2 и 4, а также аксиома (O_{III}), выполняющаяся для каждой топологической группы (Общ. топ., гл. II, § 2 и гл. III, § 3), показывают, что множество $\mathfrak{B}$ всех замкнутых уравновешенных окрестностей нуля образует в E фундаментальную систему окрестностей нуля. Как было уже указано, каждая окрестность нуля есть поглощающее множество; ясно, кроме того, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (EV_{II}) (см. следствие предложения 1); наконец, каждая фундаментальная система окрестностей нуля в E удовлетворяет условию (EV_{III}) в силу непрерывности отображения $(x, y) \to x + y$ в точке $(0, 0)$. Таким образом, множество $\mathfrak{B}$ отвечает всем требованиям.

2° Пусть теперь E — векторное пространство над K и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в E, удовлетворяющий условиям (EV_I), (EV_{II}) и (EV_{III}). Прежде всего, аксоима (EV_I) показывает, что каково бы ни было $V \in \mathfrak{B}$, $-V = V$ и $0 \in V$; эти соотношения и аксиома (EV_{III}) показывают, что $\mathfrak{B}$ есть фундаментальная система окрестностей нуля для топологии в E, согласующейся со структурой *аддитивной группы* (Общ. топ., гл. III, § 1, n° 2). Так как, с другой стороны, аксиомы (EVT'_I), (EVT'_{II}) и (EVT'_{III}) являются непосредственными следствиями аксиом (EV_I) и (EV_{II}), то определенная так топология удовлетворяет аксиоме (EVT), что и завершает доказательство.

Замечания. 1) В нормированном пространстве над недискретным нормированным телом множество всех *открытых* (соотв. *зам-*

кнутых) *шаров* с центром 0 образует фундаментальную систему окрестностей нуля, удовлетворяющую условиям (EV_I), (EV_{II}) и (EV_{III}).

2) Если телом K скаляров служит $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то каждый базис фильтра $\mathfrak{B}$ в E, удовлетворяющий уже аксиомам (EV_I) и (EV_{III}), является фундаментальной системой окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E. Действительно, нужно лишь доказать, что при этих условиях для каждого $\lambda \neq 0$ из K и каждого $V \in \mathfrak{B}$ существует $W \in \mathfrak{B}$ такое, что $\lambda W \subset V$. Но из (EV_{III}) сразу следует существование $W_1 \in \mathfrak{B}$ такого, что $2W_1 \subset V$, откуда индукцией по n получается, что для всякого $n > 0$ существует $W_n \in \mathfrak{B}$ такое, что $2^n W_n \subset V$. Так как V уравновешенно, то достаточно теперь взять n столь большим, чтобы $2^n = |2^n| > |\lambda|$, и $W = W_n$ будет обладать указанным свойством.

Этот результат не распространяется на произвольное недискретное нормированное тело K, ибо не во всяком таком теле для всех натуральных m выполняется равенство $|m\varepsilon| = m$, где ε — единичный элемент тела (см. упражнение 1).

3) Если K — *дискретное* тело, то условия (EVT'_I) и (EVT'_{III}) выполняются для *любой* топологии в E. Рассуждая как в доказательстве предложения 5, легко показать, что в топологическом векторном пространстве E над K существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ замкнутых окрестностей нуля, удовлетворяющая условиям (EV_{II}) и (EV_{III}). Обратно, если базис фильтра $\mathfrak{B}$ в векторном пространстве E относительно K таков, что все множества из $\mathfrak{B}$ содержат 0 и выполнены условия (EV_{II}) и (EV_{III}), то $\mathfrak{B}$ служит фундаментальной системой окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E.

4. Признаки непрерывности и равностепенной непрерывности

Пусть E и F — топологические векторные пространства над одним и тем же телом K. Для того чтобы линейное отображение f пространства E в F было непрерывно, достаточно, чтобы оно было непрерывно в начале (Общ. топ., гл. III, § 2, предложение 13). Это предложение обобщается следующим образом:

Предложение 6. *Пусть* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* F — *топологические векторные пространства над коммутативным недискретным нормированным телом* K. *Для того чтобы полилинейное отображение* f *произведения* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *в* F *было непрерывно, достаточно, чтобы* f *было непрерывно в точке* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Действительно, пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольная точка из $\prod_{i=1}^{n} E_i$. Нужно показать, что для каждой окрестности нуля W из F существуют окрестности нуля V_i в E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что выполнение n отношений $z_i \in V_i$ влечет отношение

$$f(a_1+z_1, a_2+z_2, \ldots, a_n+z_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in W.$$

Но

$$f(a_1+z_1, a_2+z_2, \ldots, a_n+z_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_H u_H,$$

где H пробегает $2^n - 1$ подмножеств отрезка $I = [1, n]$ натурального ряда $\mathbf{N}$, отличных от I, а $u_H = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i = a_i$ при $i \in H$ и $y_i = z_i$ при $i \notin H$. С другой стороны, в F существует $2^n - 1$ уравновешенных окрестностей нуля W_H таких, что $\sum_H W_H \subset W$. Так как f, по предположению, непрерывно в точке $(0, 0, \ldots, 0)$, то в каждом E_i существует окрестность нуля U_i такая, что из выполнения n отношений $x_i \in U_i$ следует $f(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_H W_H$. И так как U_i — поглощающее множество, то в K существует $\lambda_i \neq 0$, для которого $\lambda_i a_i \in U_i$. Пусть теперь λ — элемент из K такой, что $|\lambda| > |\lambda_i^{-1}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $|\lambda| > 1$. Покажем, что окрестности $V_i = \lambda^{-n} U_i$ обладают требуемым свойством. Действительно, пусть p — число элементов множества $\complement H$; имеем $u_H = \mu f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\mu = \lambda^{-np}\left(\prod_{i \in H} \lambda_i^{-1}\right)$, и так как из выбора λ следует, что $|\mu| \leqslant 1$, то $u_H \in \mu W_H \subset W_H$, поскольку W_H уравновешенно. Тем самым предложение доказано.

Предложение 7. *При тех же предположениях относительно E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и F, для того, чтобы множество $\mathfrak{E}$ полилинейных отображений произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ в F было равностепенно непрерывно, достаточно, чтобы оно было равностепенно непрерывно в точке* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Действительно, в доказательстве предложения 6 окрестности U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ могут быть выбраны так, чтобы отношения $x_i \in U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ влекли $f(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_H W_H$ для *каждого* отображения $f \in \mathfrak{E}$.

5. *Равномерная структура и пополнение топологического векторного пространства*

Топология топологического векторного пространства E, согласуясь со структурой аддитивной группы в E, определяет в E *равномерную структуру* (Общ. топ., гл. III, § 3). Говоря о равномерной структуре топологического векторного пространства E, мы всюду, где не оговорено противное, будем иметь в виду именно эту структуру. Каждое *непрерывное линейное* отображение топологического векторного пространства E в топологическое векторное пространство F *равномерно непрерывно*. Точно так же равномерно непрерывно каждое преобразование подобия $x \to ax + b$ пространства E.

Отметим, что непрерывное полилинейное отображение, вообще говоря, не является равномерно непрерывным, как показывает уже отображение $(x, y) \to xy$ пространства $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$.

Как непосредственно следует из определений, *равностепенно непрерывное* семейство *линейных* отображений топологического векторного пространства E в топологическое векторное пространство F *равномерно равностепенно непрерывно*.

Топологическое векторное пространство называют *полным*, если наделенное своей равномерной структурой, оно является полным равномерным пространством.

Определение 4. *Вещественным* (соотв. *комплексным*) *банаховским пространством называют полное нормированное пространство над телом* $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$).

Примеры. Если K — полное недискретное нормированное тело, то пространства $\mathscr{B}_K(I)$ и $\mathscr{C}_K^\infty(I)$ (n° 2, пример) полны. То же верно для пространства $L_K^1(I)$ (там же), снабженного нормой $\|x\|_1 = \sum_{\iota \in I} |\xi_\iota|$. Действительно, пусть (x_n) — последовательность Коши в этом пространстве и $x_n = (\xi_{n\iota})_{\iota \in I}$. Так как $|\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1$ для каждого $\iota \in I$, то последовательность $(\xi_{n\iota})_{n \geqslant 1}$, для каждого $\iota \in I$, сходится в K к некоторому пределу ζ_ι. Далее, так как $\sum_{\iota \in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1$ для каждого конечного множества J из I, то, прежде

всего, существует постоянная $a > 0$, не зависящая от J, m и n, такая, что $\sum_{\iota \in J} |\xi_{m\iota} - \xi_{n\iota}| \leqslant a$. Устремляя m к $+\infty$, получаем, что $\sum_{\iota \in J} |\zeta_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant a$, откуда $\sum_{\iota \in J} |\zeta_\iota| \leqslant a + \|x_n\|_1$, чем доказано, что $z = (\zeta_\iota)$ принадлежит пространству $L^1_K(I)$. Далее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует n_0 такое, что $\sum_{\iota \in J} |\zeta_\iota - \xi_{n\iota}| \leqslant \varepsilon$ для каждого $n \geqslant n_0$ и каждого конечного множества J из I. Переходя к пределу, видим, что $\|z - x_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$, так что z есть предел последовательности (x_n).

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ — две отделимые топологии, согласующиеся со структурой векторного пространства E над телом K. Пусть, далее, $\mathfrak{T}$ мажорирует $\mathfrak{T}'$ и существует фундаментальная система окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$, замкнутых в $\mathfrak{T}'$. При этих условиях, каждое множество A из E, полное в равномерной структуре, порождаемой в E топологией $\mathfrak{T}'$, полно также в равномерной структуре, порождаемой топологией $\mathfrak{T}$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в A относительно $\mathfrak{T}$; тогда $\mathfrak{F}$ тем более есть фильтр Коши относительно $\mathfrak{T}'$ и, следовательно, сходится в топологии $\mathfrak{T}'$ к какому-то пределу $x_0 \in A$. Покажем, что x_0 есть предел фильтра $\mathfrak{F}$ и в топологии $\mathfrak{T}$. Пусть V — симметричная окрестность нуля для $\mathfrak{T}$, замкнутая в $\mathfrak{T}'$. В силу предположения, $\mathfrak{F}$ содержит множество M, малое порядка V, так что $M \subset x_1 + V$ для произвольной точки $x_1 \in M$. Но $x_1 + V$ замкнуто в $\mathfrak{T}'$, следовательно x_0, являющееся точкой прикосновения для M в топологии $\mathfrak{T}'$, содержится в $x_1 + V$. Отсюда заключаем, что $M \subset x_0 + V + V$, чем доказательство и завершается (обобщение этого результата см. в Общ. топ., гл. II, § 3, упражнение 1).

Утверждение предложения 8 теряет силу, если не предполагать существование фундаментальной системы окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$, замкнутых в $\mathfrak{T}'$ (см. гл. II, § 5, упражнение 12).

Следствие. *Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ — две отделимые топологии, согласующиеся со структурой векторного пространства E над телом K. Пусть, далее, $\mathfrak{T}$ мажорирует $\mathfrak{T}'$ и существует фундаментальная система $\mathfrak{V}$ окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$, полных в равномерной структуре, порождаемой $\mathfrak{T}'$. Тогда E полно в равномерной структуре, порождаемой $\mathfrak{T}$.*

Действительно, предложение 8 показывает, что существует фундаментальная система окрестностей нуля для $\mathcal{T}$, полных в равномерной структуре, порождаемой $\mathcal{T}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в E относительно $\mathcal{T}$ и $V \in \mathfrak{V}$. $\mathfrak{F}$ содержит множество M, малое порядка V, так что $M \subset x_1 + V$ для любого $x_1 \in M$. Но так как $x_1 + V$ полно, то заключаем, что след фильтра $\mathfrak{F}$ на $x_1 + V$ имеет предел, а значит и сам фильтр $\mathfrak{F}$ имеет предел.

Пусть K_0 — отделимое топологическое тело, K — его всюду плотное подтело, E — отделимое топологическое векторное пространство над K и $\hat{E}$ — пополнение аддитивной топологической группы E (Общ. топ., гл. III, § 3, теорема 2). Билинейное отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $K \times E$ аддитивных групп K и E в аддитивную группу E продолжается по непрерывности до билинейного отображения произведения $K_0 \times \hat{E}$ в $\hat{E}$ (Общ. топ., гл. III, § 5, теорема 1); мы будем употреблять для него то же обозначение $(\lambda, x) \to \lambda x$ и рассмотрим лишь его сужение на $K_0 \times \hat{E}$. В силу принципа продолжения тождеств (Общ. топ., гл. I, § 6, предложение 10) имеем $1 \cdot x = x$ и $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ для всех $\lambda \in K_0$, $\mu \in K_0$ и $x \in \hat{E}$. Следовательно, внешнее произведение $(\lambda, x) \to \lambda x$ определяет в $\hat{E}$ структуру векторного пространства относительно K_0, согласующуюся с топологией в $\hat{E}$. Если K_0 полно, то мы говорим, что определенное так топологическое векторное пространство $\hat{E}$ над K_0 есть *пополнение* топологического векторного пространства E (над K).

Все сказанное применимо, в частности, когда K — любое нормированное тело, ибо тогда и его пополнение $\hat{K}$ — нормированное тело (Общ. топ., гл. IX, § 3, предложение 6).

В качестве приложения пополнения топологического векторного пространства укажем, что предложение 3 сохраняет силу при замене слова „компактное" на „предкомпактное". Действительно, если H предкомпактно в E, то его замыкание $\overline{H}$ в $\hat{E}$ компактно; следовательно, и уравновешенная оболочка множества $\overline{H}$ компактна, а так как ее пересечение с E есть уравновешенная оболочка множества H, то эта последняя предкомпактна.

6. *Векторные подпространства и факторпространства топологического векторного пространства*

Пусть M — векторное подпространство топологического векторного пространства E. Ясно, что топология, индуцируемая в M из E,

согласуется со структурой векторного пространства в M; рассматривая M как топологическое векторное пространство, мы всюду, где не оговорено противное, будем подразумевать пространство, получаемое путем наделения M топологией, индуцируемой из E. Тогда равномерная структура, порожденная топологией пространства M, совпадает с равномерной структурой в M, индуцируемой из E (Общ. топ., гл. III, § 3, n° 2).

Как известно, в факторпространстве E/M фактортопология топологии пространства E по подпространству M согласуется со структурой аддитивной группы (Общ. топ., гл. III, § 2, n° 4). Покажем, что она согласуется и со структурой векторного пространства, т. е. (если обозначить через $x \to \dot{x}$ каноническое отображение E на E/M) что отображение $(\lambda, \dot{x}) \to \lambda\dot{x}$ произведения $K \times (E/M)$ в E/M непрерывно. Для этого достаточно (Общ. топ., гл. I, § 9, теорема 1) показать непрерывность отображения $(\lambda, x) \to \lambda\dot{x}$ произведения $K \times E$ в E/M, ибо аддитивные группы $K \times (E/M)$ и $(K \times E)/(\{0\} \times M)$ можно отождествить (Общ. топ., гл. III, § 2, предложение 17). Но это отображение есть композиция отображения $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $K \times E$ в E и канонического отображения E на E/M, которые оба непрерывны.

Рассматривая E/M как топологическое векторное пространство, мы всегда будем подразумевать, если не оговорено противное, что оно наделено фактортопологией топологии пространства E по подпространству M. Как известно, для того чтобы E/M было *отделимым*, необходимо и достаточно, чтобы M было *замкнуто* в E (Общ. топ., гл. III, § 2, теорема 2).

Пусть E — *неотделимое* топологическое векторное пространство и N — замыкание начала в E (пересечение всех окрестностей нуля). Как известно, N есть подгруппа аддитивной группы E (Общ. топ., гл. III, § 2, n° 1); будучи, с другой стороны, инвариантным относительно всех гомотетий с ненулевым коэффициентом (предложение 1), N есть *замкнутое векторное подпространство* пространства E. Факторпространство E/N, которое уже отделимо, будет называться *отделимым топологическим векторным пространством, ассоциированным* с неотделимым пространством E.

Пример. Пусть $I = [a, b]$ — компактный интервал в $\mathbf{R}$ и E — векторное пространство (над $\mathbf{R}$), образованное *правильными* функциями на I со значениями в $\mathbf{R}$ (Функц. вещ. перем., гл. II, § 1,

п° 3). Пусть V_α, для каждого $\alpha > 0$, — множество всех функций $x \in E$, для которых $\int_a^b |x(t)|\,dt \leqslant \alpha$. Непосредственно проверяется, что множество всех V_α есть базис фильтра, удовлетворяющий условиям (EV_I), (EV_{II}) и (EV_{III}) и, следовательно, определяющий топологию, согласующуюся со структурой векторного пространства в E. Но эта топология — неотделимая, ибо всякая функция x, равная нулю на дополнении к произвольному фиксированному конечному множеству из I, является правильной и принадлежит всем множествам V_α. Отделимым же пространством, ассоциированным с E, служит пространство классов правильных функций, на которые разбивается E отношением эквивалентности $\int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt = 0$ (см. Интегрир., гл. IV, § 2).

7. *Произведение топологических векторных пространств*

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — любое семейство топологических векторных пространств над одним и тем же топологическим телом K и E — произведение векторных пространств E_ι. Как известно (Общ. топ., гл. III, § 2, п° 9), в E произведение топологий пространств E_ι согласуется с произведением структур аддитивных групп E_ι. Покажем, что эта топология вместе с тем согласуется со структурой векторного пространства в E, для чего достаточно убедиться в непрерывности отображения $(\lambda, (x_\iota)) \to (\lambda x_\iota)$ произведения $K \times E$ в E или, иначе (Общ. топ., гл. I, § 8, теорема 1), в непрерывности отображения $(\lambda, (x_\iota)) \to \lambda x_\varkappa$ произведения $K \times E$ в $E_\varkappa$ для каждого $\varkappa$. Но это последнее отображение есть композиция отображений $(\lambda, (x_\iota)) \to (\lambda, x_\varkappa)$ и $(\lambda, x_\varkappa) \to \lambda x_\varkappa$, которые оба непрерывны.

Рассматривая $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ как топологическое векторное пространство, мы всегда будем подразумевать, если не оговорено противное, что его топология есть произведение топологий пространств E_ι.

Предложение 9. *В произведении* $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ *топологических векторных пространств* E_ι *прямая сумма* F *векторных пространств* E_ι (Алг., гл. II, § 1, п° 7) *есть всюду плотное подпространство.*

Действительно, F есть множество всех точек $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$, для которых лишь конечное число x_ι отлично от нуля. Пусть $y = (y_\iota)$ — произвольная точка из E и V — любая ее окрестность. V содержит

элементарное множество $\prod_{\iota\in I} V_\iota$, где V_ι — любая окрестность точки y_ι в E_ι для всех индексов ι, принадлежащих некоторому конечному множеству H из I, и $V_\iota = E_\iota$ для всех индексов $\iota \notin H$. Но точка $z = (x_\iota)$ из F, в которой $x_\iota = y_\iota$ для $\iota \in H$ и $x_\iota = 0$ для $\iota \notin H$, содержится в V, чем предложение 9 и доказано.

В гл. II, § 2, n° 3, будет определена другая топология в прямой сумме произвольного семейства топологических векторных пространств над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ более специального типа.

3. *Топологическая прямая сумма подпространств*

Если топологическое векторное пространство E есть прямая сумма *конечного* семейства $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ своих векторных подпространств, то каноническое взаимно однозначное отображение $(x_i) \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ произведения $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E *непрерывно*; но оно *не обязательно является гомеоморфизмом.*

Определение 5. *Пусть E — топологическое векторное пространство и $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечное семейство его векторных подпространств такое, что E есть их прямая сумма. Говорят, что E есть топологическая прямая сумма подпространств M_i, если каноническое отображение $(x_i) \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ произведения $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E является гомеоморфизмом* (и, следовательно, изоморфизмом структур топологических векторных пространств).

Предложение 10. *Пусть E — топологическое векторное пространство, являющееся прямой суммой своих векторных подпространств M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Для того чтобы E было их топологической прямой суммой, необходимо и достаточно, чтобы линейное отображение $x \to k_i(x)$, относящее каждому $x \in E$ его составляющую в M_i, было непрерывно для каждого индекса i.*

Действительно, $(x_i) \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ есть непрерывное отображение произведения $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E, а сформулированное условие выражает непрерыв-

ность обратного отображения $x \to (k_i(x))$, чем предложение и доказано.

Так как $\sum_{i=1}^{n} k_i(x) = x$, то достаточно, впрочем, непрерывности $n-1$ из функций k_i, чтобы была непрерывна и n-я.

Пусть e — тождественное отображение пространства E на себя; в обозначениях предложения 10 можно написать

$$e = k_1 + k_2 + \ldots + k_n,$$

причем $k_i \circ k_j = 0$ для $i \neq j$ и $k_i \circ k_i = k_i$. Обратно:

Предложение 11. *Пусть p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства E в себя таких, что $e = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, $p_i p_j = 0$ для $i \neq j$ и $p_i^2 = p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. Тогда E есть топологическая прямая сумма подпространств $M_i = p_i(E)$ и $p_i(x)$ для каждого $x \in E$ есть составляющая x в M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.*

Действительно, так как $x = e(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$ для всех $x \in E$, то E есть сумма подпространств M_i. Далее, если $y_i \in M_i$ таковы, что $\sum_{i=1}^{n} y_j = 0$, то (в силу равенства $p_i^2 = p_i$) это отношение можно записать в виде $\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i) = 0$, откуда

$$0 = p_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(y_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_j(p_i(y_i)) = p_j^2(y_j) = y_j$$

для каждого индекса j; это показывает, что E есть прямая сумма подпространств M_i, а $p_i(x)$ — составляющая x в M_i. Так как p_i непрерывны, то предложение 10 показывает, что E есть топологическая прямая сумма подпространств M_i.

Отметим, что условия $p_i^2 = p_i$ являются следствиями соотношений $e = p_1 + \ldots + p_n$ и $p_i p_j = 0$ при $i \neq j$. Действительно, $p_i = e p_i = \sum_{j=1}^{n} p_j p_i = p_i^2$.

Определение 6. *Линейное отображение u векторного пространства E в себя, удовлетворяющее условию $u^2 = u$, называется проектором.*

Таким образом, предложение 11 показывает, что имеется взаимно однозначное соответствие между разложениями пространства E в топологическую прямую сумму n его векторных подпространств и разложениями e в сумму n аннулирующих друг друга *непрерывных* проекторов.

Если E — топологическая прямая сумма двух своих подпространств M и N, то говорят еще, что N есть *топологическое дополнение* к M в E. Чтобы N было таковым, необходимо и достаточно, чтобы каноническое отображение E/M на N (Алг., гл. II, § 1, n° 4) было *изоморфизмом* (структур топологического векторного пространства).

Предложение 12. *Пусть E — топологическое векторное пространство. Для того чтобы его векторное подпространство M обладало в E топологическим дополнением, необходимо и достаточно, чтобы на E существовал непрерывный проектор p такой, что $p(E) = M$.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, так как $p^2 = p$, то $p(e - p) = p - p^2 = 0$ и, следовательно, $e = p + (e - p)$ есть разложение e в сумму двух аннулирующих друг друга непрерывных проекторов. Так как $p(E) = M$, то утверждение следует теперь из предложения 11, причем топологическим дополнением к $M = p(E)$ служит $p^{-1}(0)$.

Отметим, что непрерывный проектор p пространства E на M служит продолжением на всё E тождественного отображения M на себя и что, обратно, каждое непрерывное линейное отображение E в M, служащее продолжением тождественного отображения M на себя, есть непрерывный проектор. Поэтому условие предложения 12 можно сформулировать еще следующим образом: *необходимо и достаточно, чтобы тождественное отображение M на себя можно было продолжить до непрерывного линейного отображения E на M.*

Замечания. 1) Чтобы избежать смешения, подпространство в E, дополнительное к M (в смысле структуры не топологического векторного пространства), иногда называется *алгебраическим дополнением* к M.

2) Если *отделимое* топологическое векторное пространство E есть топологическая прямая сумма семейства $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ его векторных подпространств, то каждое из них *замкнуто*. Действительно, E канонически изоморфно произведению $\prod_{i=1}^{n} M_i$, а так как M_i отделимы, то соответствующие им составляющие произведения $\prod_{i=1}^{n} M_i$ замкнуты, как пересечения замкнутых множеств.

3) Не для всякого *замкнутого* подпространства M отделимого топологического векторного пространства E существует дополнительное (в алгебраическом смысле) замкнутое векторное подпространство (даже если E — банаховское пространство; см. § 3, следствие 4 теоремы 1 и гл. IV, § 5, упражнение 5в). Тем более M не обязательно обладает в E топологическим дополнением (см. § 2, упражнение 2). Все же мы увидим в § 2, что (замкнутое) подпространство M конечной факторразмерности имеет в E топологическое дополнение, по крайней мере если K — полное недискретное нормированное тело (§ 2, предложение 3).

Предложение 13. *Пусть E и F — топологические векторные пространства и u — непрерывное линейное отображение E в F. Для существования непрерывного линейного отображения v пространства F в E, при котором $u\circ v$ было бы тождественным отображением F на себя* (в этом случае говорят, что *u обратимо справа* и *v — правое обратное к u*), *необходимо и достаточно, чтобы u было гомоморфизмом E на F* (Общ. топ., гл. III, § 2, n° 7) *и $u^{-1}(0)$ обладало топологическим дополнением в E.*

Условия *необходимы*. Действительно, если v — правое обратное к u, то $u(v(F))=F$ и тем более $u(E)=F$; далее $p=v\circ u$ есть непрерывное линейное отображение E в себя такое, что $p^2=p$; следовательно (предложение 12), $p(E)=v(u(E))=v(F)$ имеет в E топологическое дополнение $p^{-1}(0)$, и так как, в силу предположения, $u(p(x))=u(x)$, то $p^{-1}(0)=u^{-1}(0)$. Наконец, взаимно однозначное отображение $E/u^{-1}(0)$ на F, ассоциированное с отображением u, есть композиция взаимно однозначного отображения $E/p^{-1}(0)$ на $v(F)$, ассоциированного с отображением p, и сужения u на $v(F)$; так как оба эти отображения — изоморфизмы, то u — гомоморфизм E на F (см. Общ. топ., гл. III, § 2, n° 7).

Условия *достаточны*. Действительно, пусть φ — канонический гомоморфизм E на $E/u^{-1}(0)$. Сказать, что $u^{-1}(0)$ обладает топологическим дополнением M в E, все равно что сказать, что сужение φ на M есть изоморфизм M на $E/u^{-1}(0)$. Так как, с другой стороны, $u = \bar{u} \circ \varphi$, где $\bar{u}$ — изоморфизм $E/u^{-1}(0)$ на F, то мы видим, что сужение u на M есть изоморфизм M на F, и, следовательно, обратный изоморфизм v таков, что $u \circ v$ есть тождественное отображение F на себя.

Предложение 14. *Пусть E и F — топологические векторные пространства и u — непрерывное линейное отображение E в F. Для существования непрерывного линейного отображения v пространства F в E, при котором $v \circ u$ было бы тождественным отображением E на себя* (в этом случае говорят, что *u обратимо слева* и *v — левое обратное к u*), *необходимо и достаточно чтобы u было изоморфизмом E на $u(E)$ и $u(E)$ обладало топологическим дополнением в F.*

Условия *достаточны*, ибо при их выполнении левое обратное v к u получается путем компонирования непрерывного проектора F на $u(E)$ с изоморфизмом $u(E)$ на E, обратным к u.

Условия *необходимы*. Действительно, соотношение $v(u(x)) = x$ показывает, что $u^{-1}(0)$ сводится к нулевому элементу; таким образом, u есть взаимно однозначное отображение E на $u(E)$, и так как сужение v на $u(E)$ непрерывно, то u — изоморфизм E на $u(E)$. С другой стороны, $q = u \circ v$ есть непрерывное линейное отображение F на $u(E)$ такое, что $q^2 = q$, а это показывает (см. предложение 12), что $u(E)$ обладает топологическим дополнением в F.

9. Один метод топологизации векторных пространств

Предложение 15. *Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических векторных пространств над топологическим телом K, E — векторное пространство над K и f_ι, для каждого $\iota \in I$, — линейное отображение E в E_ι. Тогда наименее сильная топология $\mathfrak{T}$ в E, при которой непрерывны все функции f_ι, согласуется со структурой векторного пространства в E. Пусть $\varphi(x)$ для каждого $x \in E$ означает точку $(f_\iota(x))$ пространства*

$F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$. *Тогда* $\mathfrak{T}$ *есть прообраз топологии подпространства* $\varphi(E)$ *пространства* F *относительно линейного отображения* φ.

Вторая часть предложения есть непосредственное следствие определений топологии $\mathfrak{T}$, произведения топологий и прообраза топологии (Общ. топ., гл. I, §§ 3, 7 и 8). А тогда первая вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Пусть* M *и* N *— векторные пространства,* g *— линейное отображение* M *в* N *и* $\mathfrak{T}_0$ *— топология, согласующаяся со структурой векторного пространства в* N. *Тогда прообраз* $\mathfrak{T}_0$ *относительно* g *согласуется со структурой векторного пространства в* M.

Покажем, например, непрерывность отображения $(\lambda, x) \to \lambda x$ в каждой точке $(\lambda_0, x_0) \in K \times M$. Каждая окрестность нуля в M содержит окрестность вида $g^{-1}(U)$, где U — окрестность нуля в N; в силу предположения существуют окрестность V нуля в K и окрестность W нуля в N такие, что из $\lambda - \lambda_0 \in V$, $y - y_0 \in W$ следует $\lambda y - \lambda_0 y_0 \in U$. Но тогда из $\lambda - \lambda_0 \in V$, $x - x_0 \in g^{-1}(W)$ следует $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in g^{-1}(U)$. Так же доказывается и непрерывность отображения $(x, y) \to x - y$ в $M \times M$.

Пусть $\mathfrak{B}_\iota$ для каждого индекса $\iota \in I$ — фундаментальная система окрестностей нуля в E_ι. По определению топологии $\mathfrak{T}$, фильтр окрестностей нуля для нее порождается объединением семейств множеств $f_\iota^{-1}(\mathfrak{B}_\iota)$; иными словами, множества вида

$$\bigcap_k f_{\iota_k}^{-1}(V_{\iota_k}),$$

где $(\iota_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — любые конечные наборы индексов из I и V_{ι_k}, для каждого k, — любое множество из $\mathfrak{B}_{\iota_k}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии $\mathfrak{T}$.

Следствие 1. *Пусть* G *— топологическое векторное пространство над* K. *Для непрерывности линейного отображения и пространства* G *в пространство* E *(наделенное топологией* $\mathfrak{T}$*)*

необходимо и достаточно, чтобы для каждого индекса $\iota \in I$ было непрерывно линейное отображение $f_\iota \circ u$ пространства G в E_ι.

Действительно, для непрерывности u необходима и достаточна непрерывность $\varphi \circ u$.

Следствие 2. *Пусть пространства E_ι отделимы. Для отделимости топологии $\mathfrak{T}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \neq 0$ из E существовал индекс $\iota \in I$, при котором $f_\iota(x) \neq 0$.*

Действительно, если E_ι отделимы, то и $\varphi(E)$ отделимо, и для отделимости топологии $\mathfrak{T}$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы φ было взаимно однозначно. Заметим, что тогда E (наделенное топологией $\mathfrak{T}$) можно отождествить посредством отображения φ с подпространством $\varphi(E)$ пространства $\prod_{\iota \in I} E_\iota$.

Следствие 3. *Пусть E — векторное пространство над топологическим телом K и $(\mathfrak{T}_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологий, согласующихся со структурой векторного пространства в E. Тогда и верхняя грань $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_\iota$ согласуется со структурой векторного пространства в E.*

Действительно, пусть E_ι — топологическое векторное пространство, получающееся при наделении E топологией $\mathfrak{T}_\iota$, и f_ι — тождественное отображение E на E_ι; тогда $\mathfrak{T}$ есть наименее сильная топология в E, при которой все f_ι непрерывны.

Упражнения. 1) Пусть $E_0 = \mathbf{Q}_p^{\mathbf{N}}$ — произведение счетного бесконечного числа экземпляров p-адического тела $\mathbf{Q}_p$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbf{Q}_p$ (Общ. топ., гл. III, § 5, упражнение 22 и след.). Пусть $P = \mathbf{Z}_p^{\mathbf{N}} \subset E_0$ и E — порожденное им подпространство в E_0. Введем в аддитивной группе P компактную топологию — произведение топологий сомножителей $\mathbf{Z}_p$. Пусть $\mathfrak{B}$ — фильтр окрестностей нуля в P для этой топологии. Показать, что $\mathfrak{B}$ есть фундаментальная система окрестностей нуля в E для топологии $\mathfrak{T}$, согласующейся со структурой аддитивной группы в E и такой, что функция $(\lambda, x) \to \lambda x$ непрерывна в точке $(0,0) \in \mathbf{Q}_p \times E$; показать, что функция $\lambda \to \lambda x_0$ непрерывна в $\mathbf{Q}_p$ для каждого $x_0 \in E$, но гомотетия $x \to \frac{1}{p} x$ в E не непрерывна в топологии $\mathfrak{T}$.

2) Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным топологическим телом K. Для того чтобы отображение

$(\lambda, x) \to \lambda x$ было равномерно непрерывным в окрестности точки $(0, 0) \in K \times E$, необходимо и достаточно существование окрестности нуля V_0 в E такой, чтобы множества λV_0, где λ пробегает все ненулевые элементы из K, образовывали фундаментальную систему окрестностей нуля в E. Показать, что если K — недискретное нормированное тело и E *отделимо*, то равномерная структура в E тогда *метризуема*.

3) В топологическом векторном пространстве E над недискретным топологическим телом K существует фундаментальная система $\mathfrak{V}$ замкнутых окрестностей нуля, удовлетворяющая условиям $(\mathrm{EV_{II}})$ и $(\mathrm{EV_{III}})$ и условиям:

$(\mathrm{EV_{Ia}})$ каково бы ни было $V \in \mathfrak{V}$, существуют $W \in \mathfrak{V}$ и окрестность нуля U в K такие, что $UW \subset V$;

$(\mathrm{EV_{Iб}})$ каковы бы ни были $x \in E$ и $V \in \mathfrak{V}$, в K существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda x \in V$.

Обратно, пусть E — векторное пространство над K и $\mathfrak{V}$ — базис фильтра в E, удовлетворяющий условиям $(\mathrm{EV_{Ia}})$, $(\mathrm{EV_{Iб}})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ и $(\mathrm{EV_{III}})$. Показать, что в E существует, и притом только одна, топология, согласующаяся со структурой векторного пространства и имеющая $\mathfrak{V}$ фундаментальной системой окрестностей нуля.

4) Обобщить предложение 6 на случай, когда E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и F — топологические векторные пространства над любым недискретным коммутативным топологическим телом.

5) Пусть K — дискретное коммутативное тело и E — тело отношений кольца формальных рядов $K[[X, Y]]$ от двух переменных над K (Алг., гл. IV, § 5). Пусть V_n, для каждого целого $n \geqslant 0$, — множество всех формальных рядов, степень каждого члена которых не меньше n. Показать, что множества V_n образуют в E фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой векторного пространства над K и такой, что E в этой топологии метризуемо и полно, причем если тело K конечно, то E локально компактно. Показать, что билинейное отображение $(u, v) \to uv$ произведения $E \times E$ в E непрерывно в точке $(0, 0)$, но существуют $u_0 \in E$ такие, что отображение $v \to u_0 v$ не непрерывно в E (см. Алг., гл. IV, § 5, упражнение 7 (1)).

6) Пусть E — бесконечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\mathfrak{T}$ — миожество всех уравновешенных поглощающих множеств в E. Показать, что $\mathfrak{T}$ не удовлетворяет аксиоме $(\mathrm{EV_{III}})$. Для этого пусть (e_n) — бесконечное свободное семейство в E; A_n, для каждого целого $n > 0$, — множество всех точек $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ таких, что $|t_i| \leqslant \frac{1}{n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; A — объединение всех A_n; B — векторное подпространство, дополнительное к подпространству, порожденному элементами

e_n, и $C = A + B$. Показать, что не существует множества $M \in \mathfrak{T}$, для которого бы $M + M \subset C$.

7) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — любое *бесконечное* семейство отделимых топологических векторных пространств над топологическим телом K (не сводящихся к нулевому элементу); F — произведение векторных пространств E_ι ($\iota \in I$); $\mathfrak{T}$ — топология в F, согласующаяся со структурой аддитивной группы, имеющая своей фундаментальной системой окрестностей нуля совокупность всех произведений $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, где V_ι, для *каждого* индекса $\iota \in I$, — *любая* окрестность нуля в E_ι (топология более сильная, чем произведение топологий пространств E_ι; см. Общ. топ., гл. III, § 2, упражнение 22).

а) Показать, что если K недискретно, то топология $\mathfrak{T}$ не согласуется со структурой векторного пространства в F.

б) Пусть E — векторное подпространство в F, являющееся прямой суммой подпространств E_ι. Показать, что E замкнуто в F и топология $\mathfrak{T}_0$ в E, индуцируемая топологией $\mathfrak{T}$, согласуется со структурой векторного пространства в E. Показать, что если каждое E_ι полно, то и E полно (см. Общ. топ., гл. III, § 3, упражнение 8). Показать, что если K недискретно, то ни для какой топологии, мажорирующей $\mathfrak{T}_0$ и согласующейся со структурой векторного пространства в E, E не является бэровским пространством.

8) Показать, что в пространстве $L^1_K(\mathbf{N})$ абсолютно суммируемых последовательностей $x = (\xi_n)$ элементов недискретного нормированного тела K нормы $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$ и $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$ неэквивалентны (см. Общ. топ., гл. IX, § 3, предложение 7); показать, что $L^1_K(\mathbf{N})$, снабженное нормой $\|x\|$, неполно даже если K полно; каково замыкание $L^1_K(\mathbf{N})$ в $\mathscr{B}_K(\mathbf{N})$?

*9) Пусть K — недискретное коммутативное нормированное тело и S — любое бесконечное множество.

а) Пусть $D = (a_n)$ — счетное бесконечное множество элементов из S и u_λ, для каждого $\lambda \in K$ с $|\lambda| \leqslant 1$, — элемент нормированного пространства $\mathscr{B}_K(S)$ (n° 2) всех ограниченных отображений множества S в K такой, что $u_\lambda(a_n) = \lambda^n$ ($n \in \mathbf{N}$) и $u_\lambda(b) = 0$ при $b \notin D$. Показать, что u_λ образуют свободное (алгебраически) семейство.

б) Вывести отсюда, что каждый базис векторного пространства $\mathscr{B}_K(S)$ равномощен K^S. [Используя а), показать, что мощность каждого базиса в $\mathscr{B}_K(S)$ не меньше мощности K; с другой стороны, заметив, что $\mathscr{B}_K(S)$ равномощно K^S, использовать упражнение 14 из Алг., гл. II, § 1 (²).]

в) Показать тем же способом, что каждый базис векторного пространства $L^1_K(S)$ равномощен $(K \times S)^{\mathbf{N}}$.

10) Пусть E — полное отделимое топологическое векторное пространство над недискретным нормированным телом K; F — векторное подпространство в E; $\mathfrak{F}$ — топология в F, согласующаяся со структурой векторного пространства, мажорирующая топологию $\mathfrak{F}'$, индуцируемую в F из E, и обладающая фундаментальной системой $\mathfrak{V}$ уравновешенных окрестностей нуля, замкнутых в $\mathfrak{F}'$; F_0 — векторное подпространство в E, порожденное замыканиями $\overline{V}$ множеств $V \in \mathfrak{V}$ в E. Множества $\overline{V}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии $\mathfrak{F}_0$ в F_0, согласующейся со структурой векторного пространства; в этой топологии F_0 полно; наконец, топология, которую $\mathfrak{F}_0$ индуцирует в F, совпадает с $\mathfrak{F}$.

§ 2. Линейные многообразия в топологическом векторном пространстве

1. *Замыкание линейного многообразия*

Напомним (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение II), что аффинное линейное многообразие в векторном пространстве E над телом K (называемое просто „линейным многообразием“, если это не может привести к путанице) есть образ векторного подпространства из E при произвольном переносе.

Предложение 1. *Замыкание линейного многообразия в топологическом векторном пространстве E есть линейное многообразие.*

Действительно, так как каждый перенос есть гомеоморфизм пространства E, то достаточно доказать утверждение предложения для векторного подпространства M. Но непрерывная функция $(x, y) \to x + y$ (соотв. $(\lambda, x) \to \lambda x$) отображает $M \times M$ в M (соотв. $K \times M$ в M) и, следовательно, $\overline{M} \times \overline{M}$ в $\overline{M}$ (соотв. $K \times \overline{M}$ в $\overline{M}$) (Общ. топ., гл. I, § 4, предложение 1), а это и доказывает, что $\overline{M}$ есть векторное подпространство.

Следствие. *В топологическом векторном пространстве E каждая гиперплоскость замкнута или всюду плотна.*

Действительно, замыкание однородной гиперплоскости H, будучи векторным подпространством, содержащим H (предложение 1), может быть только самим H или всем пространством E.

Мы видим, таким образом, что для того, чтобы гиперплоскость H была *замкнутой* в E, необходимо и достаточно, чтобы $\complement H$ *содержало внутреннюю точку.*

Пусть A — подмножество топологического векторного пространства E. Напомним, что порождаемое им векторное подпространство M есть множество всевозможных линейных комбинаций элементов из A (Алг., гл. II, § 1, n° 5); замыканием M в E, в силу предложения 1, служит наименьшее замкнутое векторное подпространство, содержащее A; его называют *замкнутым векторным подпространством, порожденным множеством* A.

Определение 1. *Подмножество A топологического векторного пространства E называется тотальным, если порожденное им замкнутое векторное подпространство совпадает с E* (или, другими словами, если множество линейных комбинаций элементов из A *всюду плотно*).

Примеры. 1) В нормированном пространстве $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(I)$ непрерывных функций на $I = [0, 1]$ со значениями из $\mathbf{C}$ сужения одночленов x^n ($n \in \mathbf{N}$) на I образуют тотальное множество в силу теоремы Вейерштрасса — Стоуна (Общ. топ., гл. X, § 5, теорема 3). Точно так же в подпространстве P пространства $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(I)$, образованном функциями $f(x)$ из $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(I)$, удовлетворяющими условию $f(0) = f(1)$, сужения функций $e^{2n\pi ix}$ ($n \in \mathbf{Z}$) образуют тотальное множество (Общ. топ., гл. X, § 5, предложение 8).

2) Каждое поглощающее множество в топологическом векторном пространстве E над недискретным нормированным телом (и, в частности, каждая окрестность нуля в E) тотально, ибо порождает все E (§ 1, n° 3). Отсюда вытекает, что линейное многообразие, не плотное в E, нигде не плотно в E (Общ. топ., гл. IX, § 5, n° 1), ибо его замыкание не может содержать внутренней точки.

Определение 2. *Семейство $(a_\iota)_{\iota \in I}$ точек топологического векторного пространства E называется топологически свободным, если, каково бы ни было $\varkappa \in I$, замкнутое векторное подпространство, порожденное точками a_ι с индексами $\iota \neq \varkappa$, не содержит $a_\varkappa$.*

Пример. В нормированном пространстве $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(I)$ непрерывных функций на $I = [0, 1]$ сужения функций $e^{2n\pi ix}$ ($n \in \mathbf{Z}$) на I образуют топологически свободное семейство. Действительно, каково бы ни было $n \in \mathbf{Z}$, для любой линейной комбинации $\sum_{k \neq n} c_k e^{2k\pi ix}$ (где лишь конечное

число коэффициентов c_k отлично от нуля) имеем

$$\int_0^1 |e^{2n\pi ix} - f(x)|^2 dx = 1 + \sum_{k \neq n} |c_k|^2 \geqslant 1$$

и тем более, в силу теоремы о среднем,

$$\sup_{x \in I} |e^{2n\pi ix} - f(x)| \geqslant 1,$$

что и доказывает, что $e^{2n\pi ix}$ не содержится в замкнутом векторном подпространстве пространства $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$, порожденном функцнями $e^{2k\pi ix}$ с $k \neq n$.

Множество, образованное элементами топологически свободного семейства, называется *топологически свободным множеством* в E. Каждое подмножество топологически свободного множества топологически свободно; если пространство E отделимо, то каждое его подмножество, сводящееся к одной точке $x \neq 0$, топологически свободно.

Топологически свободное семейство свободно в алгебраическом смысле (см. Алг., гл. II, § 3, предложение 1 ([3])); но обратное неверно.

Пример. В нормированном пространстве $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ непрерывных функций на $I = [0, 1]$ сужения одночленов x^n ($n \in \mathbf{N}$) на I образуют алгебраически свободное семейство. Но так как существует последовательность (p_n) полиномов такая, что $p_n(x^2)$ равномерно сходится к x на I (Общ. топ., гл. X, § 5, лемма 2([4])), то x содержится в замкнутом векторном подпространстве пространства $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$, порожденном одночленами x^{2n} ($n \in \mathbf{N}$).

Замечания. 1) В отличие от того, что имеет место для алгебраически свободных подмножеств векторного пространства, множество всех топологически свободных подмножеств топологического векторного пространства E, вообще говоря, *не индуктивно* относительно включения (упражнение 1); кроме того, в E не обязательно содержится максимальное топологически свободное подмножество (упражнение 2), а потому и не обязательно имеется топологически свободное подмножество, которое было бы в то же время *тотальным*.

2) Пусть M — замкнутое векторное подпространство в E и $(\dot{a}_\iota)_{\iota \in I}$ — топологически свободное семейство в E/M. Семейство $(a_\iota)_{\iota \in I}$, где a_ι — любой элемент из $\dot{a}_\iota$, топологически свободно, как это следует из определения 2 и непрерывности канонического отображения E на

E/M. Отметим, однако, что *замкнутое* векторное подпространство N, порожденное элементами a_ι, может быть таково, что $M \cap N \neq \{0\}$ (упражнение 1), так что сумма $M + N$ не обязательно прямая в алгебраическом смысле (и тем более в топологическом: см. § 1, n° 8).

2. *Прямые и замкнутые гиперплоскости*

Предложение 2. *Каждое одномерное отделимое топологическое векторное пространство E над недискретным нормированным телом K изоморфно K_s; более точно, для каждого $a \neq 0$ из E отображение $\xi \to \xi a$ пространства K_s на E есть изоморфизм* (иначе говоря, каждое линейное отображение K_s на E есть изоморфизм).

Так как отображение $\xi \to \xi a$ пространства K_s на E взаимно однозначно и непрерывно (§ 1, определение 1), то достаточно доказать, что оно взаимно непрерывно. Пусть α — вещественное число > 0. Нужно показать, что в E существует окрестность нуля V такая, что $\xi a \in V$ влечет $|\xi| < \alpha$. Так как K недискретно, то существует элемент $\xi_0 \in K$ такой, что $0 < |\xi_0| < \alpha$; с другой стороны, так как E отделимо, то в E существует окрестность нуля V, не содержащая $\xi_0 a$, причем можно предполагать ее уравновешенной (§ 1, предложение 4). Покажем, что $\xi a \in V$ влечет $|\xi| < |\xi_0|$; действительно, если бы это было не так, то мы имели бы $|\xi_0 \xi^{-1}| \leqslant 1$, и, следовательно, $\xi_0 a = (\xi_0 \xi^{-1})(\xi a) \in V$, в противоречие с предположением; тем самым предложение доказано.

Замечание. Утверждение предложения 2 не обязательно сохраняет силу, если не предполагать E отделимым. Точно так же оно не сохраняет силу, когда K — *дискретное* нормированное тело. Действительно, пусть K_1 — недискретное нормированное тело и K — дискретное тело, получающееся из него путем введения несобственной нормы; K_1 есть одномерное топологическое векторное пространство над K, не изоморфное K_s.

Следствие. *В отделимом топологическом векторном пространстве E над недискретным нормированным телом K каждое одномерное векторное подпространство D изоморфно K_s.*

Теорема 1. *Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным нормированным телом и H — гиперплоскость в E, заданная уравнением $f(x) = \alpha$, где f — линейная форма,*

не равная тождественно нулю. Для того чтобы H было замкнуто в E, необходимо и достаточно, чтобы f была непрерывна.

Достаточность условия очевидна (Общ. топ., гл. I, § 4, теорема 2); докажем его необходимость. H можно предполагать однородной замкнутой гиперплоскостью, заданной уравнением $f(x)=0$. Тогда факторпространство E/H будет одномерным отделимым топологическим векторным пространством над K. f можно представить в виде $g\circ\varphi$, где φ — каноническое отображение E на E/H, а g — линейное отображение E/H на K_s; но g в силу предложения 2 непрерывно, следовательно, непрерывно и f.

Следствие 1. *Каждая ненулевая непрерывная линейная форма на E есть гомоморфизм E на K_s.*

Следствие 2. *Каждое (одномерное) векторное подпространство D, алгебраически дополнительное к замкнутой однородной гиперплоскости H, топологически дополнительно к H.*

Действительно, множество в D, сводящееся к одному элементу 0, замкнуто, как пересечение D с замкнутым множеством H; следовательно, D отделимо. Но так как E/H также отделимо, то каноническое отображение D на E/H, будучи линейным, есть изоморфизм в силу предложения 2.

Замечание. Можно указать примеры отделимых топологических векторных пространств над $\mathbf{R}$, на которых каждая непрерывная линейная форма тождественно равна нулю (упражнение 2); следовательно, в таком пространстве каждая гиперплоскость всюду плотна (следствие предложения 1).

3. Конечномерные векторные подпространства

Теорема 2. *Каждое отделимое топологическое векторное пространство E конечной размерности n над полным недискретным нормированным телом K изоморфно K_s^n; а именно для каждого базиса $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ пространства E над K линейное отображение $(\xi_i)\to\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ есть изоморфизм K_s^n на E.*

Предложение 2 показывает, что теорема 2 верна при $n=1$; применим индукцию по n. Пусть H — векторное подпространство пространства E, порожденное элементами $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$; в силу

предположения индукции отображение $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \to \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i$ есть изоморфизм K_s^{n-1} на H. Подпространство H, будучи изоморфным произведению полных пространств, полно (Общ. топ., гл. II, § 5, предложение 4); следовательно, оно *замкнуто* в E (Общ. топ., гл. II, § 3, предложение 6). Пусть D — подпространство Ke_n в E, дополнительное к H; так как E — прямая топологическая сумма подпространств H и D (следствие 2 теоремы 1), то отображение $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \to \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ произведения $K_s^{n-1} \times K_s$ на E есть изоморфизм.

Предположение *полноты* тела K существенно для справедливости теоремы 2 при $n > 1$. Действительно, пусть K — неполное нормированное тело и $\hat{K}$ — его пополнение. Ka всюду плотно в $\hat{K}$ для каждого $a \neq 0$ из $\hat{K}$, ибо $x \to xa$ есть гомеоморфизм $\hat{K}$ на себя. Если $a \notin K$, то подпространство $K + Ka$ топологического векторного пространства $\hat{K}$ над K имеет размерность 2 над K и, однако, не изоморфно K_s^2, ибо в $K + Ka$ каждое одномерное подпространство плотно.

Следствие 1. *В отделимом топологическом векторном пространстве E над полным недискретным нормированным телом K каждое конечномерное векторное подпространство F замкнуто.*

Действительно, если F n-мерно, то оно изоморфно K_s^n, значит полно и, следовательно, замкнуто в E (Общ. топ., гл. II, § 3, предложение 6).

Следствие 2. *Пусть K — полное недискретное нормированное тело, E — конечномерное отделимое топологическое векторное пространство над K и F — любое топологическое векторное пространство над K. Каждое линейное отображение E в F непрерывно.*

Действительно, каждое линейное отображение K_s^n в F имеет вид $(\xi_i) \to \sum_{i=1}^{n} \xi_i b_i$ и потому непрерывно.

Следствие 3. *В отделимом топологическом векторном пространстве E над полным недискретным нормированным телом каждое конечное свободное подмножество топологически свободно.*

Следствие 4. *Пусть E — топологическое векторное пространство над полным недискретным нормированным телом, M — замкнутое и F — конечномерное векторные подпространства в E. Подпространство $M+F$ замкнуто в E.*

Действительно, факторпространство E/M отделимо. Пусть φ — канонический гомоморфизм E на E/M. Подпространство $M+F$ равно $\varphi^{-1}(\varphi(F))$. Но $\varphi(F)$ конечномерно в E/M, поэтому (следствие 1) $\varphi(F)$ замкнуто в E/M и, следовательно, $\varphi^{-1}(\varphi(F))$ замкнуто в E.

Заметим, что сумма $M+N$ *произвольных* замкнутых векторных подпространств M и N отделимого топологического векторного пространства E не обязательно замкнута в E °даже если E — гильбертово пространство$_0$ (см. гл. IV, § 2, упражнение 19).

Предложение 3. *Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над полным недискретным нормированным телом K и M — замкнутое векторное подпространство конечной факторразмерности n в E. Каждое подпространство N в E, алгебраически дополнительное к M, топологически дополнительно к M.*

Напомним, что M всегда обладает алгебраическим дополнением в E (Алг., гл. II, § 3, предложение 5). Так как E/M отделимо и n-мерно над K, то E/M и N оба изоморфны K_s^n (теорема 2) и каноническое отображение E/M на N (Алг., гл. II, § 1, п° 4) есть *изоморфизм* E/M на N (следствие 2 теоремы 2).

Следствие. *Пусть E и F — отделимые топологические векторные пространства над полным недискретным нормированным телом. Если F конечномерно, то каждое непрерывное линейное отображение E на F есть гомоморфизм.*

4. Локально компактные топологические векторные пространства

Теорема 3. *Для локальной компактности топологического векторного пространства E (не сводящегося к одному элементу 0) над полным недискретным нормированным телом K необходимо и достаточно, чтобы K было локально компактно, а E — отделимо и конечномерно над K.*

Достаточность условий очевидна, ибо, в силу теоремы 2, E тогда изоморфно пространству вида K_s^n, которое локально компактно. Установим их необходимость. Что E должно быть отделимым — ясно. Пусть теперь V — компактная уравновешенная окрестность нуля в E; покажем прежде всего, что когда λ пробегает K^*, множества λV образуют *фундаментальную систему окрестностей нуля*. Действительно, для каждой уравновешенной окрестности нуля W в E существует конечное число точек $a_i \in V$ таких, что $a_i + W$ образуют покрытие множества V; далее, так как W — поглощающее множество, то для каждого индекса i существует $\lambda_i \neq 0$ в K такое, что $\lambda_i a_i \in W$. Если поэтому λ — ненулевой элемент из K такой, что $|\lambda| \leqslant |\lambda_i|$ для всех i, то $\lambda a_i \in W$ для всех i, ибо W — уравновешенное множество. Так как, кроме того, можно считать, что $|\lambda| \leqslant 1$, то $\lambda V \subset \bigcup_i (\lambda a_i + \lambda W) \subset W + W$, чем наше утверждение и доказано, поскольку множества $W + W$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.

Пусть теперь $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ и α — элемент из K^* такой, что $|\alpha| \leqslant \varepsilon$. По предположению, в V существует конечное число точек b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ таких, что $V \subset \bigcup_{j=1}^{n} (b_j + \alpha V)$; тогда тем более $V \subset M + \alpha V$, где M — конечномерное подпространство, порожденное элементами b_j. Покажем, что предположение о несовпадении M с E ведет к противоречию. Действительно, пусть c — точка из $\complement M$ и L — множество тех $\lambda \in K^*$, для которых $c + \lambda V$ пересекает M. Так как M замкнуто (следствие 1 теоремы 2), то $d = \inf_{\lambda \in L} |\lambda| > 0$, ибо когда λ пробегает K^*, то множества $c + \lambda V$ образуют фундаментальную систему окрестностей для c. Поэтому существуют точка $y \in M$ и элемент $\mu \in K^*$ такие, что $c - y \in \mu V$ и $d \leqslant |\mu| \leqslant d(1 + \varepsilon)$. Положим $x_0 = \mu^{-1}(c - y)$. Так как $x_0 \in V$, то $x_0 \in M + \alpha V$, т. е. $x_0 = z + \alpha t$, где $z \in M$ и $t \in V$. Отсюда $c = y + \mu z + \mu\alpha t$ или $c - \mu\alpha t = y + \mu z \in M$. Но так как $|\mu\alpha| \leqslant \varepsilon |\mu| \leqslant \varepsilon(1 + \varepsilon) d < d$, то мы пришли к противоречию, и тем самым доказано, что $M = E$.

Из теоремы 2 следует тогда, что E изоморфно пространству вида K_s^n; следовательно, E может быть локально компактным, лишь

если само K локально компактно (Общ. топ., гл. I, § 10, предложение 14), и доказательство закончено.

Замечания. 1) Отметим, что при доказательстве конечномерности пространства E было использовано лишь то, что V *предкомпактно*. Мы видим, таким образом, что если в E существует предкомпактная окрестность нуля, а K есть полное недискретное нормированное тело, то E изоморфно пространству вида K_s^n и, следовательно, *полно*; но тогда E *локально компактно* и потому K локально компактно, а E — конечномерно над K.

2) Утверждение теоремы 3 теряет силу, если K — дискретное тело, как показывает пример тела $\mathbf{R}$ (наделенного обычной топологией), рассматриваемого как топологическое векторное пространство над дискретным телом $\mathbf{Q}$.

Упражнения. 1) Пусть в топологическом произведении $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, рассматриваемом как топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, e_n ($n \in \mathbf{N}$) — элементы канонического базиса прямой суммы $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. Пусть $a_0 = e_0$, $a_n = e_0 + \frac{1}{n} e_n$ для $n \geqslant 1$. Показать, что элементы a_i, где $0 \leqslant i \leqslant n$, для каждого целого $n \geqslant 0$ образуют топологически свободное семейство в E, но бесконечное семейство $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ не является топологически свободным. Пусть M — замкнутое векторное подпространство $\mathbf{R}a_0$ и $\dot{a}_n$ — класс элемента a_n в E/M. Классы $\dot{a}_n$ ($n \geqslant 1$) образуют в E/M топологически свободное семейство, однако замкнутое подпространство N, порожденное элементами a_n с $n \geqslant 1$, содержит M.

*2) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, образованное непрерывными числовыми функциями на интервале $I = [0, 1]$. Пусть $V_{\delta, \varepsilon}$, для каждой пары чисел (δ, ε) такой, что $\delta > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, — множество тех $x \in E$, для которых $|x(t)| \leqslant \delta$ всюду вне (зависящего от x) открытого множества значений t, связные компоненты которого имеют суммарную длину $\leqslant \varepsilon$.

а) Показать, что множества $V_{\delta, \varepsilon}$ образуют в E базис фильтра $\mathfrak{S}$, удовлетворяющий аксиомам $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ и $(\mathrm{EV_{III}})$ (§ 1, предложение 5) и, следовательно, определяют в E топологию, согласующуюся со структурой векторного пространства; показать, что эта топология отделима.

б) Показать, что для любой пары (δ, ε) указанного вида существует целое $n > 0$ такое, что $E = \sum_{i=1}^{n} A_i$, где все $A_i = V_{\delta, \varepsilon}$. [Рассмотреть надлежащее разбиение единицы на I.]

в) Вывести из б), что каждая непрерывная линейная форма f на E тождественно равна нулю. [Принять во внимание, что если непрерыв-

ная числовая функция x равна нулю всюду вне интервала $J \subset I$ длины $< \varepsilon$, то $\lambda x \in V_{\delta, \varepsilon}$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$.] Вывести отсюда, что в E не существует максимального топологически свободного подмножества.

3) Пусть K — недискретное топологическое тело, удовлетворяющее следующей аксиоме:

(KT_6) Для любых окрестностей нуля U и V в K существует $\lambda \in K^*$ такое, что $\lambda (CV)^{-1} \subset U$ и $(CV)^{-1}\lambda \subset U$.

[Каждое недискретное тело, удовлетворяющее аксиоме (KT_5) упражнения 13 в Общ. топ., гл. III, § 5 ([5]), тем более удовлетворяет аксиоме (KT_6).] Распространить предложение 2 и теорему 1 на топологические векторные пространства над K; распространить также теорему 2 и предложение 3 при дополнительном предположении, что K полно.

4) Пусть K — топологическое тело, полученное путем перенесения на тело $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ топологии из $\mathbf{Q}^2$ посредством отображения $(x, y) \to x + y\sqrt{2}$.

а) Пусть E — множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, наделенное структурой векторного пространства над K и топологией, индуцированной из $\mathbf{R}$. Показать, что E — одномерное отделимое топологическое векторное пространство над K, не изоморфное K.

б) Пусть F — топологическое векторное пространство $E \times E$ над K. В F гиперплоскость $E \times \{0\}$ замкнута, но не выражается никаким уравнением вида $f(x) = 0$ с непрерывной линейной формой f на E.

5) Пусть K — неполное недискретное нормированное тело, E — топологическое векторное подпространство $K + Ka$ его пополнения $\hat{K}$, где $a \notin K$, и $F = K \times E$. В F подпространство $M = K \times \{0\}$ замкнуто и имеет факторразмерность 2. Пусть N — дополнительное к M подпространство, порожденное векторами (0, 1) и $(1, a)$; показать, что F не является топологической прямой суммой подпространств M и N.

*6) Пусть p — простое число, $\mathbf{Q}_p$ — тело p-адических чисел, полученное путем пополнения тела $\mathbf{Q}$, наделенного p-адической топологией (Общ. топ., гл. IX, § 3, n° 2). Пусть E_0 — произведение топологических пространств $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{R}$ и K — тело $\mathbf{Q}$, наделенное дискретной топологией. E_0 есть топологическое векторное пространство над K. Пусть M — векторное подпространство в E_0, образованное элементами (r, r), где r пробегает $\mathbf{Q}$; пусть, далее, θ — иррациональное число и N — векторное подпространство, образованное элементами $(0, r\theta)$, где r пробегает $\mathbf{Q}$; пусть, наконец, E — подпространство $M + N$ пространства E_0. Показать, что N есть замкнутая гиперплоскость в E, не обладающая топологическим дополнением. [Принять во внимание, что M всюду плотно в E_0.]

7) Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и f — представление аддитивной группы E в аддитивной группе $\mathbf{R}$. Показать, что если в E существует окрестность нуля, на которой f ограниченно, то f непрерывно и является линейной формой на E.

8) Пусть S — любое бесконечное множество.

а) Показать, что наименьшая из мощностей тотальных множеств в нормированном пространстве $\mathscr{B}(S)$ ограниченных отображений S в $\mathbf{R}$ (§ 1, n° 2) равна мощности $\mathfrak{P}(S)$. [Рассмотреть множество характеристических функций всех подмножеств из S и принять во внимание, что в $\mathbf{R}$ существует счетное всюду плотное множество.]

б) Показать, что наименьшая из мощностей тотальных множеств в нормированном пространстве $L^1(S)$ суммируемых семейств вещественных чисел, имеющих S своим множеством индексов (§ 1, n° 2), равна мощности S.

§ 3. Метризуемые топологические векторные пространства

1. Окрестности нуля в метризуемом топологическом векторном пространстве

Мы говорим, что топологическое векторное пространство E *метризуемо*, если его топология метризуема. Таким образом, наделенное структурой аддитивной группы и своей топологией, E есть метризуемая группа (Общ. топ., гл. IX, § 3, n° 1).

Как известно, для метризуемости топологической группы необходимо и достаточно, чтобы ее нейтральный элемент e обладал счетной фундаментальной системой окрестностей, пересечение которых сводилось бы к e (Общ. топ., гл IX, § 3, предложение 1). Для топологических векторных пространств над недискретным нормированным телом имеет место следующее более точное предложение:

Предложение 1. *В метризуемом топологическом векторном пространстве E над недискретным нормированным телом K существуют последовательность (V_n) замкнутых окрестностей нуля и стремящаяся к нулю последовательность (λ_m) элементов из K такие, что семейство $(\lambda_m V_n)$* (где m и n — произвольные целые числа > 0) *есть фундаментальная система окрестностей нуля, удовлетворяющая следующим условиям*:

а) *все V_n — уравновешенные поглощающие множества*;

б) *для каждого целого p существует целое q такое, что $V_q + V_q \subset V_p$*;

в) *Пересечением всех множеств $\lambda_m V_n$ служит* 0.

Обратно, пусть E — векторное пространство над K и (V_n) — счетный базис фильтра в E, а (λ_m) — стремящаяся к нулю после-

довательность элементов из K, удовлетворяющие условиям а), б), в). *Тогда множества $\lambda_m V_n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E.*

Первая часть утверждения есть непосредственное следствие предложений 4 и 5 § 1. Обратно, так как последовательность (λ_m) стремится к нулю, то для любого $\lambda \neq 0$ из K существует номер m такой, что $|\lambda_m| \leqslant |\lambda|$, откуда $\lambda_m V_n \subset \lambda V_n$, поскольку V_n — уравновешенное множество. Предложение 5 § 1 показывает тогда, что множества $\lambda_m V_n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для отделимой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E; так как семейство этих множеств счетно, то определяемая ими в E топология метризуема.

Как было уже отмечено (§ 1, п° 3, замечание 2 вслед за предложением 5), если $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$, то из условий а) и б) предложения 1 вытекает, что для каждого номера n и каждого $\lambda > 0$ существует номер m такой, что $\lambda V_m \subset V_n$. Следовательно, если базис фильтра (V_n) удовлетворяет условиям а) и б) и пересечением всех множеств V_n служит 0, то сами множества V_n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E.

Равномерную структуру метризуемого топологического векторного пространства E можно задать *инвариантным расстоянием* $d(x, y) = |x - y|$, где $x \to |x|$ есть непрерывное отображение E в $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим трем условиям: 1) $|-x| = |x|$; 2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; 3) отношения $|x| = 0$ и $x = 0$ равносильны (Общ. топ., гл. IX, § 3, п° 1).

В гл. IX „Общей топологии" показано (§ 1, предложение 2), как можно ввести такое расстояние d с помощью убывающей последовательности (W_n) окрестностей нуля в E, образующей фундаментальную систему и такой, что $W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$ (6). Так как E есть метризуемое векторное пространство над недискретным телом K, то можно, кроме того, считать множества W_n уравновешенными (§ 1, предложение 4); как показывает способ введения расстояния d (там же), тогда *из* $|\lambda| \leqslant 1$ *следует* $|\lambda x| \leqslant |x|$. Кроме того, из условий $(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{I}})$ и $(\mathrm{EVT}'_{\mathrm{II}})$ п° 1 § 1 вытекает, что $|\lambda x_0|$ *стремится к нулю вместе с* $\lambda \in K$ для каждого $x_0 \in E$ и что $|\lambda_0 x|$ *стремится к нулю вместе с* $|x|$ для каждого $\lambda_0 \in K$. Обратно, если функция $|x|$ обладает всеми указанными свойствами, а W_n означает множество тех $x \in E$, для которых $|x| \leqslant 2^{-n}$, то сразу видно, что W_n образуют фун-

даментальную систему уравновешенных окрестностей нуля для метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E.

Замечание. *Нормированные* пространства составляют один из наиболее важных классов метризуемых векторных пространств (§ 1, n° 2). Но следует заметить, что существуют метризуемые векторные пространства, топология которых *не может быть определена нормой* (упражнение 2); позднее мы познакомимся с важными примерами таких пространств.

2. Свойства метризуемых векторных пространств

Каждое векторное подпространство метризуемого топологического векторного пространства E метризуемо; то же верно для каждого факторпространства E/M пространства E по замкнутому векторному подпространству M (Общ. топ., гл. IX, § 3, предложение 4). Произведение любого *счетного* семейства метризуемых топологических векторных пространств метризуемо (Общ. топ., гл. IX, § 2, следствие теоремы 1). Если K_0 — полное нормированное тело и K — его всюду плотное подтело, то пополнение $\hat{E}$ метризуемого векторного пространства E над K есть метризуемое векторное пространство над K_0 (§ 1, n° 5 и Общ. топ., гл. IX, § 2, предложение 1). Наконец, если E — полное метризуемое векторное пространство, то E/M полно для каждого замкнутого векторного подпространства M (Общ. топ., гл. IX, § 3, предложение 4).

3. Непрерывные линейные функции на метризуемом векторном пространстве

Теорема 1 (Банах). *Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом K. Каждое непрерывное линейное отображение u пространства E на F есть гомоморфизм.*

Достаточно доказать, что при отображении u образ каждой окрестности нуля из E есть окрестность нуля в F. Теорема будет вытекать из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть E и F — топологические векторные пространства над недискретным нормированным телом K и u — непрерывное линейное отображение E на F. Если F — бэровское пространство* (Общ. топ., гл. IX, § 5, n° 3), *то $\overline{u(V)}$ есть окрестность нуля в F для каждой окрестности нуля V из E.*

Пусть W — уравновешенная окрестность нуля в E такая, что $W+W\subset V$ (§ 1, предложение 5), и α — элемент из K с $|\alpha|>1$. Объединение множеств $\alpha^n W$ есть тогда всё E; в самом деле, для каждого $x\in E$ существует $\beta\in K$ такое, что $x\in\beta W$ (§ 1, предложение 5), и если n столь велико, что $|\beta|<|\alpha^n|$, то также $x\in\alpha^n W$, поскольку W уравновешенно. Следовательно, объединение множеств $u(\alpha^n W)=\alpha^n u(W)$ есть всё F. Так как F — бэровское пространство, то по крайней мере одно из множеств $\alpha^n\overline{u(W)}$ имеет внутреннюю точку (Общ. топ., гл. IX, § 5, определение 3); следовательно, $\overline{u(W)}$ имеет внутреннюю точку y_0; а так как $-u(W)=u(W)$, то $-\overline{u(W)}=\overline{u(W)}$ и, следовательно, $0=y_0+(-y_0)$ есть внутренняя точка множества $\overline{u(W)}+\overline{u(W)}$. Но в силу непрерывности суммы $y+z$ на $F\times F$, $\overline{u(W)}+\overline{u(W)}$ содержится в замыкании множества $u(W)+u(W)=u(W+W)\subset u(V)$; следовательно, $\overline{u(V)}$ есть окрестность нуля.

Будем обозначать через $B_r(x)$ *замкнутый* шар с центром x и радиусом r.

Лемма 2. *Пусть E и F — метрические пространства, причем E полно. Пусть, далее, u — непрерывное отображение E в F, обладающее следующим свойством: для каждого $r>0$ существует $\rho>0$ такое, что образ $u(B_r(x))$ плотен в шаре $B_\rho(u(x))$ для каждого $x\in E$. При этих условиях, для каждого $a>r$ образ $u(B_a(x))$ содержит шар $B_\rho(u(x))$.*

Действительно, пусть (r_n) — бесконечная последовательность чисел >0 такая, что $r_1=r$ и $\sum_{n=1}^{\infty} r_n=a<\infty$. Для каждого n существует число $\rho_n>0$ (с $\rho_1=\rho$) такое, что $u(B_{r_n}(x))$ плотно в $B_{\rho_n}(u(x))$ для всех $x\in E$. При этом можно предполагать, что $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$.

Пусть x_0 — точка из E и y — точка из $B_\rho(u(x_0))$. Покажем, что y содержится в $u(B_a(x_0))$.

Для этого определим по индукции последовательность $(x_n)_{n>0}$ точек из E так, чтобы $x_n\in B_{r_n}(x_{n-1})$ и $u(x_n)\in B_{\rho_{n+1}}(y)$ для всех $n\geqslant 1$. Пусть x_i, удовлетворяющие этим условиям, уже определены для значений i от 0 до $n-1$; имеем $y\in B_{\rho_n}(u(x_{n-1}))$, и так как $u(B_{r_n}(x_{n-1}))$ плотно в $B_{\rho_n}(u(x_{n-1}))$, то существует точка

$x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$, образ которой $u(x_n)$ содержится в окрестности $B_{\rho_{n+1}}(y)$ точки y; тем самым существование последовательности (x_n) доказано.

(x_n) есть последовательность Коши, ибо расстояние между x_n и x_{n+p} мажорируется суммой $r_{n+1}+r_{n+2}+\ldots+r_{n+p}$, произвольно малой при достаточно большом n. Так как E полно, то эта последовательность сходится к некоторой точке $x \in E$, причем расстояние между x_0 и x мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a$, так что $x \in B_a(x_0)$. Но так как u непрерывно, то последовательность $(u(x_n))$ сходится к $u(x)$; а так как $u(x_n) \in B_{\rho_{n+1}}(y)$, то $u(x) = y$ и лемма 2 доказана.

Вернемся теперь к теореме. Введем в каждом из пространств E и F расстояние, согласующееся с топологией этого пространства и инвариантное относительно переносов (n° 1). Так как F, будучи полным метрическим пространством, есть бэровское пространство (Общ. топ., гл. IX, § 5, теорема 1), то лемма 1 показывает, что $\overline{u(B_r(0))}$ есть окрестность нуля в F для каждого $r > 0$; следовательно, существует $\rho > 0$ такое, что $u(B_r(0))$ плотно в окрестности нуля $B_\rho(0)$ пространства F. Путем переноса заключаем, что $u(B_r(x))$ плотно в $B_\rho(u(x))$ для каждого $x \in E$. А так как E полно, то лемма 2 показывает, что $u(B_a(0))$ есть окрестность нуля в F для каждого $a > r$. Тем самым теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если E и F — полные метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом, то каждое непрерывное взаимно однозначное линейное отображение u пространства E на F есть изоморфизм.*

В частности, если E и F — полные *нормированные* пространства, то существует число $a > 0$ такое, что $\|u(x)\| \geqslant a\|x\|$ для каждого $x \in E$.

Следствие 2. *Пусть E — векторное пространство над недискретным нормированным телом, а $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — две топологии в E, согласующиеся со структурой векторного пространства и такие, что в каждой из них E метризуемо и полно. Если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ сравнимы, то они совпадают.*

Следствие 3. *Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом. Для того чтобы непрерывное линейное отображение u пространства E в F было гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $u(E)$ было замкнуто в F.*

Условие необходимо, ибо если u — гомоморфизм, то $u(E)$, будучи изоморфным факторпространству $E/u^{-1}(0)$, полно (n° 2) и потому замкнуто в F. Условие достаточно, ибо если $u(E)$ замкнуто в F, то оно является полным метризуемым векторным пространством и потому u есть гомоморфизм E на $u(E)$ в силу теоремы 1.

Следствие 4. *Пусть E — полное метризуемое векторное пространство над недискретным нормированным телом. Если M и N — взаимно дополнительные (алгебраически) замкнутые векторные подпространства в E, то E есть их топологическая прямая сумма* (§ 1, n° 8).

Действительно, $M \times N$ есть полное метризуемое векторное пространство, и так как его отображение $(y, z) \to y + z$ на E непрерывно и взаимно однозначно, то оно есть изоморфизм (следствие 1).

Следствие 5 (теорема о замкнутом графике). *Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом. Для того чтобы линейное отображение u пространства E на F было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его график в $E \times F$ был замкнут.*

Условие необходимо, поскольку график непрерывного отображения в отделимое пространство всегда замкнут (Общ. топ., гл. I, § 8, следствие 2 предложения 6). Чтобы убедиться в достаточности условия, заметим, что в силу этого условия график G отображения u, будучи замкнутым векторным подпространством полного метризуемого пространства $E \times F$, сам есть полное метризуемое пространство. Но проекция $z \to \mathrm{pr}_1(z)$ пространства G на E является непрерывным взаимно однозначным линейным отображением и потому изоморфизмом (следствие 1); а так как обратным к нему служит отображение $x \to (x, u(x))$, то u непрерывно на E.

Это следствие можно выразить также в следующей форме: если для любой последовательности (x_n) точек из E, стремящейся к нулю

и такой, что последовательность $(u(x_n))$ *стремится к некоторому пределу* y, этот последний необходимо $= 0$, то u непрерывно.

Пример. Пусть E — векторное подпространство пространства числовых функций, определенных на $I = [0, 1]$; пусть $\|f\|$ — норма на E такая, что E, снабженное этой нормой, *полно*, причем его топология мажорирует топологию простой сходимости; пусть, наконец, E содержит множество $\mathscr{D}_I$ всех бесконечно дифференцируемых функций на I. Покажем, что тогда существует целое $k \geqslant 0$ такое, что E содержит множество $\mathscr{D}_I^{(k)}$ всех функций, имеющих непрерывную k-ю производную на I.

Пусть V_{mn}, для каждой пары целых чисел $m > 0$, $n \geqslant 0$, — множество всех функций $f \in \mathscr{D}_I$ таких, что $|f^{(h)}(x)| \leqslant \frac{1}{m}$ для $0 \leqslant h \leqslant n$ и каждого $x \in I$; легко видеть, что множества V_{mn} образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в $\mathscr{D}_I$; кроме того, $\mathscr{D}_I$ *полно* в этой топологии (Функц. вещ. перем., гл. II, § 1, теорема 1). Пусть u — каноническое отображение $\mathscr{D}_I$ в E; покажем, что u *непрерывно*. В силу следствия 5 теоремы 1, достаточно доказать, что если последовательность (f_n) сходится к нулю в $\mathscr{D}_I$ и имеет предел f в E, то необходимо $f = 0$; но это очевидно, поскольку, в силу предположения, f есть предел (f_n) в топологии простой сходимости. Поэтому существуют целое $k \geqslant 0$ и число $a > 0$ такие, что для функций $f \in \mathscr{D}_I$ из $p_k(f) = \sup_{\substack{x \in I \\ 0 \leqslant h \leqslant k}} |f^{(h)}(x)| \leqslant a$ следует $\|f\| \leqslant 1$.

Но $p_k(f)$ — норма в $\mathscr{D}_I^{(k)}$, а $\mathscr{D}_I$ образует в $\mathscr{D}_I^{(k)}$ подпространство, всюду плотное по этой норме (ибо, как сразу следует из теоремы Вейерштрасса — Стоуна, множество полиномов всюду плотно в $\mathscr{D}_I^{(k)}$). И так как, в силу предыдущего, тождественное отображение $\mathscr{D}_I$ (снабженного нормой p_k) в E непрерывно, то оно продолжается по непрерывности на всё пространство $\mathscr{D}_I^{(k)}$, чем наше предложение и доказано.

Упражнения. *1) а) Пусть E — векторное пространство над нормированным телом K; предположим, что E наделено метризуемой топологией, согласующейся с его структурой аддитивной группы, и что, кроме того, $x \to \lambda_0 x$ непрерывно в E для каждого $\lambda_0 \in K$ и $\lambda \to \lambda x_0$ непрерывно в K для каждого $x_0 \in E$. Показать, что если одна из двух метризуемых групп K и E *полна*, то топология в E согласуется с его структурой векторного пространства. [См. Общ. топ., гл. IX, § 5, упражнение 22.]

б) Пусть G_α, для каждого вещественного $\alpha > 0$, — топологическая группа $\mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}$ и G — произведение топологических групп G_α (где α пробегает множество всех чисел > 0). Пусть $t_\alpha(x)$, для каждого $x \in \mathbf{R}$, — образ x при каноническом отображении $\mathbf{R}$ на G_α. Ото-

бражение $x \to (t_\alpha(x))$ есть непрерывное взаимно однозначное представление φ группы $\mathbf{R}$ на некоторую подгруппу H группы G. Следовательно, прообраз топологии подгруппы H относительно отображения φ согласуется со структурой аддитивной группы в $\mathbf{R}$; пусть E — топологическая группа, получающаяся путем наделения $\mathbf{R}$ этой топологией. Показать, что отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $\mathbf{R} \times E$ в E не непрерывно и, однако, $x \to \lambda_0 x$ непрерывно в E для каждого $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ и $\lambda \to \lambda x_0$ непрерывно в $\mathbf{R}$ для каждого $x_0 \in E$.

2) а) Показать, что если отделимое топологическое пространство E над недискретным нормированным телом K таково, что каждая окрестность нуля содержит векторное подпространство, не сводящееся к одному элементу 0, то его топология не может быть задана нормой. В частности, топология произведения бесконечной последовательности (E_n) отделимых топологических векторных пространств над K, не сводящихся к одному элементу 0, не может быть задана нормой.

б) Пусть $E = K_s^{\mathbf{N}}$; для каждого $x = (\xi_n) \in E$ положим $|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi_n|}{2^n(1+|\xi_n|)}$. Показать, что топология пространства E определяется расстоянием $d(x, y) = |x - y|$, что $|\lambda x| \leqslant |x|$ при $|\lambda| \leqslant 1$ и $|\lambda x| \leqslant |\lambda|\,|x|$ при $|\lambda| \geqslant 1$ и что $|\lambda x_0|$ стремится к нулю вместе с $|\lambda|$ для каждого $x_0 \in E$.

*3) Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства над неднскретиым нормированным телом н u — непрерывное линейное отображение E в F. Показать, что если u не есть отображенне E на F, то $u(E)$ I *категории* в F. [Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, доказать, что если $u(E)$ не есть множество I категории в F, то $u(V)$ для любой окрестности нуля V из E есть окрестность нуля в F.]

4) Пусть E и F — полные метрнзуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом, $\mathfrak{T}_0$ — топология пространства F и $\mathfrak{T}$ — отделимая топология в F, мажорнруемая топологией $\mathfrak{T}_0$. Показать, что если линейное отображенне u пространства E в F непрерывно в топологии $\mathfrak{T}$, то оно непрерывно также в топологии $\mathfrak{T}_0$. [Воспользоваться следствнем 5 теоремы 1.]

Вывести отсюда, что если $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — две различные топологии в векторном пространстве E над неднскретным нормнрованным телом, согласующнеся со структурой векторного пространства в E, н в каждой из них E полно н метрнзуемо, то в E не существует отделимой топологии, мажорнруемой топологиями $\mathfrak{T}_1$ н $\mathfrak{T}_2$.

5) Пусть E и F — отделимые топологнческне векторные пространства над недискретным нормированным телом, причем E полно и метрнзуемо. Пусть, далее, u — непрерывное взаимно однозначное линейное отображение E в F н G — векторное подпространство в $u(E)$. Пусть, наконец, в G существует топология $\mathfrak{T}$, мажорнрующая топологию, индуцнруемую из F, и согласующаяся со структурой векторного

пространства в G, причем G в этой топологии метризуемо и полно. Показать что сужение иа G отображенiя, обратиого к u, непрерывно в топологии $\mathfrak{T}$. [Воспользоваться следствием 5 теоремы 1.]

6) Пусть (E_n) — последовательность полиых метризуемых векторных пространств иад неднскретным нормированиым телом K н u_n, для каждого n, — непрерывное лннейное отображение E_n в отделимое топологическое векторное пространство E над K, причем E есть объединение подпространств $u_n(E_n)$. Показать, что каждое непрерывное линейное отображение v пространства E *на* полное метризуемое векторное пространство F над K есть гомоморфизм E на F. [Воспользоваться упражнением 3.]

7) Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом н u — лниейное отображение E в F. Пусть N — замыкание u в F по фильтру окрестностей нуля в E (Общ. топ., гл. I, § 6, n° 4). Показать, что это — замкнутое векториое подпространство в F и что для непрерывности отображения u необходимо н достаточно, чтобы N сводилось к элементу 0. [Воспользоваться следствием 5 теоремы 1.] Показать, что N есть наименьшее из замкнутых векторных подпространств M в F, для которых $\varphi \circ u$, где φ — каноническое отображение F на F/M, есть непрерывное отображенне E в F/M.

ГЛАВА II
ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Во всей этой главе, за исключением § 6, *рассматриваются лишь векторные и аффинные пространства над телом* **R** *вещественных чисел. Говоря о векторном (или аффинном) пространстве без указания его тела скаляров, мы всегда будем подразумевать, что этим телом служит* **R**.

Напомним (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение II), что *аффинное пространство* E может быть определено как *однородное пространство* (Алг., гл. I, § 7, n° 6) аддитивной группы *векторного пространства* T, имеющее 0 единственным оператором из T, оставляющим инвариантными все элементы из E. Мы говорим, что T есть *пространство переносов* аффинного пространства E; точка, в которую $a \in E$ переводится переносом $\mathrm{t} \in T$, обозначается $a + \mathrm{t}$, или $\mathrm{t} + a$; для любых двух точек a и b из E существует и притом только один перенос, переводящий a в b; он обозначается $b - a$; при этом $a - a = 0$, $a - b = -(b - a)$. Для любой точки $a \in E$, $x \to x - a$ есть взаимно однозначное отображение E на T; отождествляя E с T посредством этого отображения, говорят, что E рассматривается как векторное пространство, в котором a *принято за начало*. Обратно, каждое векторное пространство T может быть отождествлено с аффинным пространством E, соответствующим его подгруппе $\{0\}$ (Алг., гл. I, § 7, n° 6). При таком отождествлении непустые *аффинные линейные многообразия* аффинного пространства E отождествляются с подмножествами векторного пространства T, получаемыми путем переноса его векторных подпространств (называемых также *однородными* линейными многообразиями). Напомним также, что пустое множество рассматривается как аффинное линейное многообразие.

Пусть T' — второе векторное пространство, отождествленное с аффинным пространством E', соответствующим его подгруппе $\{0\}$. *Аффинные линейные отображения* E в E' отождествляются тогда

с отображениями T в T', получающимися путем композиции линейных отображений T в T' (называемых также *однородными* линейными отображениями E в E') с переносами в T'.

Пусть даны семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ точек из E и семейство $(\lambda_\iota)_{\iota\in I}$ скаляров, отличных от нуля лишь для конечного числа индексов и таких, что $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$. Положим $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota = a + \sum_\iota \lambda_\iota (x_\iota - a)$. Эту точку, не зависящую от выбора $a\in E$, называют *центром тяжести* семейства (x_ι), в котором каждая точка x_ι *снабжена массой* λ_ι (положительной, отрицательной или нулевой). Множество всех этих центров тяжести (при всевозможных выборах семейств (λ_ι) указанного вида) совпадает с аффинным линейным многообразием, порожденным точками x_ι.

Напомним также, что множество всех точек $a+\lambda\mathbf{t}$, где a — фиксированная точка из E, $\mathbf{t}$ — фиксированный ненулевой вектор из T и $\lambda\geqslant 0$ (соотв. $\lambda>0$), называется *замкнутой* (соотв. *открытой*) *полупрямой* с *началом* a и *направляющим вектором* $\mathbf{t}$. Далее, множество всех точек $\lambda x+\mu y$, где x и y — две фиксированные точки из E, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$ и $\lambda+\mu=1$ (соотв. $\lambda>0$, $\mu>0$ и $\lambda+\mu=1$), называется *замкнутым* (соотв. *открытым*, при $x\neq y$) *отрезком* с *концами* x и y; при $x=y$ он сводится к точке. Наконец, при $x\neq y$, *отрезок*, *открытый в* x *и замкнутый в* y, это — множество всех точек $\lambda x+\mu y$, где $\lambda+\mu=1$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu>0$.

§ 1. Выпуклые множества

1. Определение выпуклого множества

Определение 1. *Множество A точек аффинного пространства E над* $\mathbf{R}$ *называется выпуклым, если, каковы бы ни были точки x и y из A, замкнутый отрезок с концами x и y содержится в A.*

Так как $(1-\lambda)a+\lambda x = a+\lambda(x-a)$, то это определение равносильно следующему: множество A выпукло, если его образ при гомотетии с центром в любой точке $a\in A$ и коэффициентом λ, заключенным между 0 и 1, содержится в A (иначе говоря, если A *устойчиво* относительно этих гомотетий).

Примеры. 1) Каждое аффинное линейное многообразие в E (и, в частности, пустое множество) выпукло.

2) Единственными непустыми выпуклыми множествами в $\mathbf{R}$ являются *интервалы* (Общ. топ., гл. IV, § 2, предложение 1).

3) Пусть E — векторное пространство и $\|x\|$ — *норма* в E; замкнутый шар B, образованный точками x с $\|x\| \leqslant 1$, есть выпуклое миожество, ибо из неравенств $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ следует

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqslant \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Замечание. Пусть A — выпуклое множество в векторном пространстве E; каковы бы ни были скаляры $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$. Иными словами, каковы бы ни были $x \in A$ и $y \in A$, существует $z \in A$ такое, что $(\alpha + \beta) z = \alpha x + \beta y$. Действительно, это соотношение можно записать в виде

$$z = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y,$$

и так как $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} > 0$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta} > 0$ и $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$, то утверждение следует из определения 1.

Предложение 1. *Пусть (x_ι) — семейство точек выпуклого множества A. Центр тяжести $\sum \lambda_\iota x_\iota$ точек x_ι, снабженных положительными массами λ_ι (такими, что $\sum_\iota \lambda_\iota = 1$ и $\lambda_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов), содержится в A.*

Очевидно, можно ограничиться тем случаем, когда множеством индексов служит конечный интервал $[1, p] \subset \mathbf{N}$ и $\lambda_i > 0$ для каждого номера i. При $p = 1$ предложение тривиально. Докажем его индукцией по p. Положим $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i > 0$ и $y = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$; в силу предположения индукции $y \in A$. Так как $\lambda_p = 1 - \mu$ и $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \mu y + (1-\mu) x_p$, то точка $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ содержится в A в силу определения 1.

Предложение 2. *При аффинном линейном отображении f аффинного пространства E в аффинное пространство F образ каждого выпуклого множества из E и прообраз каждого выпуклого множества из F являются выпуклыми множествами.*

Первое утверждение следует из того, что f переводит замкнутый отрезок с концами x и y в замкнутый отрезок с концами $f(x)$ и $f(y)$. Это же показывает также, что прообраз каждого замкнутого отрезка

из F содержит замкнутый отрезок, имеющий своими концами любые две точки этого прообраза, а отсюда вытекает и второе утверждение предложения 2.

В частности, образ выпуклого множества при гомотетии или переносе есть выпуклое множество.

Предложение 3. *Пусть H — гиперплоскость, заданная уравнением $g(x)=\alpha$, где g — ненулевая линейная форма на E. Полупространства, определенные соответственно неравенствами $g(x)\geqslant\alpha$, $g(x)\leqslant\alpha$, $g(x)>\alpha$, $g(x)<\alpha$, являются выпуклыми множествами.*

Действительно, эти полупространства являются прообразами интервалов из $\mathbf{R}$ относительно линейного отображения g, а последние выпуклы.

Говорят, что точки множества M находятся *по одну сторону* (соотв. *строго по одну сторону*) от гиперплоскости H, если M содержится в одном из полупространств, определяемых, в обозначениях предложения 3, неравенствами $g(x)\geqslant\alpha$ или $g(x)\leqslant\alpha$ (соотв. $g(x)>\alpha$ или $g(x)<\alpha$).

Предложение 4. *Пусть H — гиперплоскость в аффинном пространстве E. Для того чтобы точки выпуклого множества A из E находились строго по одну сторону от H, необходимо и достаточно, чтобы A не имело общих точек с H.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, предположим, что оно выполнено, и пусть $g(x)=0$ — уравнение гиперплоскости H (g — аффинное линейное отображение E в $\mathbf{R}$). Множество $g(A)$ выпукло в $\mathbf{R}$ и, значит, является интервалом, а $0\notin g(A)$. Следовательно, $g(x)$ сохраняет знак, когда x пробегает A.

2. Пересечения выпуклых множеств. Произведения выпуклых множеств

Предложение 5. *Пересечение любого семейства выпуклых подмножеств аффинного пространства E выпукло.*

Непосредственно следует из определения 1.

Предложение 6. *Пусть* $(E_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство аффинных пространств и* A_ι, *для каждого* $\iota\in I$, *— непустое подмножество пространства* E_ι. *Для того чтобы подмножество* $A=\prod_{\iota\in I}A_\iota$ *пространства* $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ *было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы* A_ι, *для каждого* $\iota\in I$, *было выпукло в* E_ι.

Действительно, каждый из проекторов pr_ι является аффинным линейным отображением, и так как $A_\iota=\mathrm{pr}_\iota A$ и $A=\bigcap_{\iota\in I}\mathrm{pr}_\iota^{-1}(A_\iota)$, то утверждение вытекает из предложений 2 и 5.

Следствие. *В пространстве* $\mathbf{R}^n$ *каждый параллелепипед* (Общ. топ., гл. VI, § 1, n° 3) *есть выпуклое множество.*

Действительно, каждый параллелепипед есть образ кирпича при аффинном линейном отображении, а последний — выпуклый в $\mathbf{R}^n$ в силу предложения 6.

Предложение 7. *Пусть* E *— векторное пространство и* A, B *— его выпуклые подмножества. Каковы бы ни были вещественные числа* α *и* β, *множество* $\alpha A+\beta B$ (образованное точками $\alpha x+\beta y$, где x пробегает A, а y пробегает B) *выпукло.*

Действительно, $\alpha A+\beta B$ есть образ выпуклого множества $A\times B$ при линейном отображении $(x, y)\to\alpha x+\beta y$ пространства $E\times E$ в E.

3. Выпуклая оболочка множества

Определение 2. *Выпуклой оболочкой любого подмножества* A *аффинного пространства* E *называют пересечение всех выпуклых множеств, содержащих* A, *т. е.* (предложение 5) *наименьшее выпуклое множество, содержащее* A.

Предложение 8. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство выпуклых подмножеств аффинного пространства* E. *Выпуклая оболочка множества* $\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$ *совпадает с множеством всех линейных комбинаций* $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$, *где* $x_\iota\in A_\iota$, $\lambda_\iota\geqslant 0$ *для всех* $\iota\in I$ (*причем* $\lambda_\iota\neq 0$ *лишь для конечного числа индексов* ι) *и* $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota=1$.

Действительно, множество C этих линейных комбинаций, очевидно, содержится в каждом выпуклом множестве, содержащем все A_ι

(предложение 1), и, с другой стороны, все $A_\iota \subset C$; таким образом, остается доказать, что C выпукло. Пусть $x = \sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, $y = \sum_\iota \mu_\iota y_\iota$ — две точки из C и $0 < \alpha < 1$. Для каждого $\iota \in I$ положим $\gamma_\iota = \alpha\lambda_\iota + (1-\alpha)\mu_\iota$ и пусть J — (конечное) множество тех индексов ι, для которых $\gamma_\iota \neq 0$. Тогда $\alpha x + (1-\alpha) y$ можно записать в виде $\sum_{\iota \in J} \gamma_\iota z_\iota$, где $z_\iota = \gamma_\iota^{-1}[\alpha\lambda_\iota x_\iota + (1-\alpha)\mu_\iota y_\iota]$ принадлежит A_ι для каждого $\iota \in J$. И так как $\sum_{\iota \in J} \gamma_\iota = \alpha \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota + (1-\alpha) \sum_{\iota \in I} \mu_\iota = 1$, то точка $\alpha x + (1-\alpha) y$ принадлежит C.

Следствие. *Выпуклая оболочка множества $A \subset E$ совпадает с множеством всех линейных комбинаций $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$, где (x_ι) — любые конечные семейства точек из A, $\lambda_\iota > 0$ для каждого ι и $\sum \lambda_\iota = 1$.*

Размерность аффинного линейного многообразия, порожденного выпуклым множеством A, если она конечна, называется также *размерностью* множества A. Аффинный ранг множества $B \subset E$ (если он определен) равен размерности выпуклой оболочки этого множества B.

4. *Выпуклые конусы*

Определение 3. *Подмножество C аффинного пространства E над $\mathbf{R}$ называют конусом с вершиной x_0, если C устойчиво относительно всех гомотетий с центром x_0 и положительным коэффициентом.*

В этом и следующем пунктах мы предполагаем, что вершина рассматриваемого конуса выбрана за начало в E; другими словами, мы предполагаем, что E есть векторное пространство, и, говоря о конусе, имеем в виду конус с вершиной 0.

Конус C с вершиной 0 мы будем называть *заостренным*, если $0 \in C$, и *затупленным* — в противном случае. Заостренный конус либо сводится к точке 0, либо есть объединение некоторого множества замкнутых полупрямых с началом 0. Затупленный конус есть объединение (возможно, пустого) множества открытых полупрямых с началом 0. Если C — затупленный конус, то $C \cup \{0\}$ — заостренный конус. Если C — заостренный конус, то $C \cap \mathbf{C}\{0\}$ — затупленный конус.

Если C — затупленный *выпуклый* конус, то $C \cup \{0\}$ — заостренный выпуклый конус. Напротив, если C — заостренный выпуклый конус, то конус $C \cap \mathbf{C}\{0\}$ — не обязательно выпуклый. Будем называть заостренный выпуклый конус, не содержащий никакой прямой, проходящей через 0, *выступающим*. Тогда:

Предложение 9. *Для того чтобы заостренный выпуклый конус C был выступающим, необходимо и достаточно, чтобы затупленный конус $C' = C \cap \mathbf{C}\{0\}$ был выпуклым.*

Если C содержит прямую, проходящую через 0, то, очевидно, C' — не выпуклый. Пусть теперь C — выступающий, а x и y — две точки из C'. Замкнутый отрезок с концами x, y содержится в C; если бы он содержал 0, то мы имели бы $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$ для некоторого λ, заключенного между 0 и 1, и, следовательно, $x = \mu y$ с $\mu < 0$, так что C содержал бы прямую, проходящую через 0 и x, в противоречие с предположением.

Предложение 10. *Для того чтобы множество $C \subset E$ было выпуклым конусом, необходимо и достаточно, чтобы $C + C \subset C$ и $\lambda C \subset C$ для каждого $\lambda > 0$.*

Действительно, условие $\lambda C \subset C$ для каждого $\lambda > 0$ характеристично для конусов. Если при этом C выпукло, то $C + C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$. Обратно, если конус C таков, что $C + C \subset C$, и $0 < \lambda < 1$, то $\lambda C + (1-\lambda)C = C + C \subset C$ и, значит, C — выпуклый.

Следствие 1. *Если C — непустой выпуклый конус, то порожденное им подпространство есть множество $C - C$* (т. е. множество всех $x - y$, где x и y пробегают C).

Действительно, пусть $V = C - C$. V не пусто, $\lambda V = V$ для каждого $\lambda \neq 0$ и $V + V = C + C - (C + C) \subset C - C = V$, так что V — векторное подпространство. И, очевидно, каждое векторное подпространство, содержащее C, содержит V.

Следствие 2. *Если C — заостренный выпуклый конус, то $C \cap (-C)$ есть наибольшее векторное подпространство, содержащееся в C.*

Действительно, пусть $W = C \cap (-C)$. W не пусто, $\lambda W = W$ для каждого $\lambda \neq 0$ и $W + W \subset (C + C) \cap (-(C + C)) \subset C \cap (-C) = W$, так что W — векторное подпространство. И, очевидно, каждое векторное подпространство, содержащееся в C, содержится в W.

Ясно, что при однородном линейном отображении f аффинного пространства E в векторное пространство F образ $f(C)$ каждого выпуклого конуса C из E есть выпуклый конус в F. Каждое пересечение выпуклых конусов в E (с вершиной 0) является выпуклым конусом. Следовательно, для каждого множества $A \subset E$ пересечение всех выпуклых конусов, содержащих A (одним из которых является само E), есть наименьший выпуклый конус, содержащий A; его называют выпуклым конусом, *порожденным* множеством A.

Предложение 11. *Пусть $(C_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство выпуклых конусов в E. Выпуклый конус, порожденный объединением всех C_ι, совпадает с множеством всех сумм $\sum_{\iota \in J} x_\iota$, где J — любые непустые конечные множества индексов из I, а $x_\iota \in C_\iota$ для каждого $\iota \in J$.*

Действительно, множество C этих сумм есть, очевидно, выпуклый конус, содержащий объединение всех C_ι и содержащийся в каждом выпуклом конусе, содержащем это объединение.

Следствие. *Выпуклый конус, порожденный множеством $A \subset E$, совпадает с множеством всех линейных комбинаций $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i$, где $(x_i)_{i \in J}$ — любые непустые конечные множества точек из A и $\lambda_i > 0$ для каждого $i \in J$.*

Достаточно заметить, что если выпуклый конус содержит точку $x \in A$, то он содержит множество C_x всех точек λx, где λ пробегает положительные числа, и что C_x есть выпуклый конус.

Предложение 12. *Выпуклый конус, порожденный выпуклым множеством $A \subset E$, совпадает с $C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$.*

Множество C, очевидно, — конус, так что достаточно показать, что оно выпукло. Пусть λx и μy — две точки из C ($\lambda > 0$, $\mu > 0$, $x \in A$, $y \in A$), и пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ таковы, что $\alpha + \beta = 1$. Имеем

$\alpha\lambda x+\beta\mu y=(\alpha\lambda+\beta\mu)z$, где $z\in A$ и $\alpha\lambda+\beta\mu>0$. Следовательно, $\alpha\lambda x+\beta\mu y\in C$.

Замечания. 1) Если, в условиях предложения 12, $0\notin A$, то C — затупленный конус и, значит, $C\cup\{0\}$ — выступающий.

2) Пусть A — любое выпуклое множество из E. Рассмотрим в $F=E\times\mathbf{R}$ выпуклое множество $A_1=A\times\{1\}$ и порожденный им выпуклый конус C с вершиной 0. Предложение 12 показывает, что A_1 есть пересечение C с гиперплоскостью $E\times\{1\}$ в F. Таким образом, каждое выпуклое миожество в E можно рассматривать как проекцию на E пересечения выпуклого коиуса в F с вершиной 0 и гиперплоскости $E\times\{1\}$.

5. *Упорядоченные векторные пространства*

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$. Мы говорим, что структура порядка в E *согласуется* со структурой векторного пространства, если она удовлетворяет следующим двум аксиомам:

($\mathrm{EO_I}$) $x\leqslant y$ *влечет* $x+z\leqslant y+z$ *для любого* $z\in E$..

($\mathrm{EO_{II}}$) $x\geqslant 0$ *влечет* $\lambda x\geqslant 0$ *для любого скаляра* $\lambda\geqslant 0$.

Множество E, наделенное этими двумя структурами, называется *упорядоченным векторным пространством*.

Отметим, что аксиома ($\mathrm{EO_I}$) означает согласованность структуры порядка со структурой аддитивной группы в E, иными словами, что E, наделенное двумя этими структурами, есть *упорядоченная группа* (Алг., гл. VI, § 1).

В частности, из теории упорядоченных групп вытекает, что отношения $x\leqslant y$ и $x+z\leqslant y+z$ равносильны. Точно так же из ($\mathrm{EO_{II}}$) следует равносильность отношений $x\leqslant y$ и $\lambda x\leqslant\lambda y$ для любого скаляра $\lambda>0$: действительио, отношение $\lambda x\leqslant\lambda y$ равиосильно отношению $\lambda(y-x)\geqslant 0$, значит, влечет $\lambda^{-1}\lambda(y-x)\geqslant 0$, что равносильно отношению $x\leqslant y$. Если $\lambda<0$, то отношение $x\leqslant y$ равносильно отношению $-\lambda x\leqslant-\lambda y$ и, значит, отношению $\lambda y\leqslant\lambda x$. Можно сказать, что аксиомы ($\mathrm{EO_I}$) и ($\mathrm{EO_{II}}$) выражают *инвариантность* структуры порядка в E относительно всех переносов и всех гомотетий с коэффициентом >0.

Пример. В векторном пространстве $E=\mathbf{R}^A$ всех вещественных функций, определенных на множестве A, отношение порядка „$x(t)\leqslant y(t)$ для всех $t\in A$“ согласуется со структурой векторного пространства.

Предложение 13. *Множество P всех элементов $\geqslant 0$ упорядоченного векторного пространства E есть выступающий заостренный выпуклый конус. Обратно, пусть P — выступающий заостренный выпуклый конус в векторном пространстве E; тогда отношение $y - x \in P$ в E есть отношение порядка. Введем для него обозначение $x \leqslant y$. Определяемая этим отношением структура порядка будет единственной согласующейся со структурой векторного пространства в E и такой, множество положительных элементов которой совпадает с P.*

Если E — упорядоченное векторное пространство, то аксиомы (EO_I) и (EO_{II}) влекут $P + P \subset P$ и $\lambda P \subset P$ для каждого $\lambda \geqslant 0$; при этом, если $x \in P$ и $-x \in P$, то $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$, значит $x = 0$, так что P есть выступающий заостренный выпуклый конус.

Обратно, если P — выступающий заостренный выпуклый конус, то из соотношений $P + P \subset P$ и $P \cap (-P) = \{0\}$ следует, что отношение $y - x \in P$ в E есть отношение порядка, согласующееся со структурой аддитивной группы в E (Алг., гл. VI, § 1, предложение 3); если записывать его в виде $y \geqslant x$, то P — это множество всех элементов $\geqslant 0$, а соотношение $\lambda P \subset P$ для $\lambda > 0$ означает, что выполнена и аксиома (EO_{II}).

Пример. °Пусть H — гильбертово пространство и $\mathscr{L}(H)$ — векторное пространство всех непрерывных операторов в H. Положительные эрмитовы операторы образуют в $\mathscr{L}(H)$ выступающий заостренный выпуклый конус. Таким образом, этот конус определяет в $\mathscr{L}(H)$ структуру порядка, согласующуюся со структурой векторного пространства, причем $A \leqslant B$ означает, что $B - A$ есть положительный эрмитов оператор.°

Пусть P — любой заостренный выпуклый конус в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$. Тогда $P \cap (-P)$ образует в E векторное подпространство H (следствие 2 предложения 10). Образ P' конуса P при каноническом отображении E на E/H есть выпуклый конус, и его прообразом в E служит P. Следовательно, $P' \cap (-P') = \{0\}$ и P' определяет в E/H структуру порядка, согласующуюся со структурой векторного пространства.

Линейную форму f на упорядоченном векторном пространстве E называют *положительной*, если $f(x) \geqslant 0$ для каждого $x \geqslant 0$ из E. То же самое можно выразить, сказав, что выпуклый конус P эле-

ментов $\geqslant 0$ из E содержится в множестве тех x, для которых $f(x) \geqslant 0$. Ясно, что положительные линейные формы образуют в пространстве E^* всех линейных форм на E выпуклый конус.

6. *Выпуклые множества в топологических векторных пространствах*

Предложение 14. *Замыкание выпуклого множества* (соотв. *выпуклого конуса*) *в топологическом векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$ *есть выпуклое множество* (соотв. *выпуклый конус с той же вершиной*).

Действительно, пусть A — выпуклое множество; функция $(x, y) \to \lambda x + (1-\lambda) y$ для каждого λ, заключенного между 0 и 1, непрерывна на $E \times E$ и отображает $A \times A$ в A; следовательно (Общ. топ., гл. I, § 4, предложение 1), она отображает $\bar{A} \times \bar{A}$ в $\bar{A}$, чем выпуклость множества $\bar{A}$ и доказана. Так же доказывается, что если C — выпуклый конус с вершиной 0, то $\bar{C} + \bar{C} \subset \bar{C}$ и $\lambda \bar{C} \subset \bar{C}$ для каждого $\lambda > 0$.

Определение 4. *Пусть A — произвольное множество в топологическом векторном пространстве E. Замкнутой выпуклой оболочкой множества A называют пересечение всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих A, т. е. наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее A.*

Вследствие предложения 14 замкнутая выпуклая оболочка множества A есть замыкание его выпуклой оболочки. Очевидно, она совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества $\bar{A}$.

Предложение 15. *Пусть A — выпуклое множество в топологическом векторном пространстве E, имеющее по крайней мере одну внутреннюю точку x_0. Если $x \in \bar{A}$, то каждая точка открытого отрезка с концами x_0 и x есть внутренняя точка множества A.*

Действительно, пусть y — точка этого отрезка и f — гомотетия с центром y и коэффициентом $\lambda < 0$, переводящая x_0 в x. Если V — открытая окрестность точки x_0, содержащаяся в A, то $f(V)$ есть окрестность точки x и, следовательно, содержит точку $f(z) \in A$. Имеем

$$f(z) - y = \lambda(z - y) = \lambda(z - f(z)) + \lambda(f(z) - y),$$

откуда $y - f(z) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}(z - f(z))$, так что y есть образ z при гомотетии g с центром $f(z)$ и коэффициентом $\mu = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$; так как $0 < \mu < 1$, то g преобразует V в окрестность точки y, содержащуюся в A, и предложение доказано.

Следствие 1. *Внутренность $\mathring{A}$ выпуклого множества A выпукла. Если $\mathring{A}$ не пусто, то оно совпадает с внутренностью множества $\bar{A}$, а $\bar{A}$ есть выпуклое множество, совпадающее с замыканием множества $\mathring{A}$.*

Действительно, из предложения 15 следует, что если $\mathring{A}$ не пусто, то оно выпукло и каждая точка из $\bar{A}$ принадлежит его замыканию. Покажем, что, с другой стороны, каждая точка x, внутренняя к $\bar{A}$, принадлежит $\mathring{A}$. Можно предполагать, что $x = 0$. Пусть V — симметричная окрестность нуля, содержащаяся в $\bar{A}$, и $y \in \mathring{A} \cap V$. Имеем $-y \in \bar{A}$, и если $y \neq 0$, то предложение 15 показывает, что $0 \in \mathring{A}$; при $y = 0$ такое заключение очевидно.

Следствие 2. *Внутренность $\mathring{C}$ выпуклого конуса есть выпуклый конус. Если множество $\mathring{C}$ не пусто, то оно совпадает с внутренностью множества $\bar{C}$, а $\bar{C}$ есть заостренный выпуклый конус, совпадающий с замыканием множества $\mathring{C}$.*

Так как гомотетии с коэффициентами > 0 и центром 0 преобразуют C в себя, то они преобразуют $\mathring{C}$ в себя, так что $\mathring{C}$ — конус; остальные утверждения вытекают из следствия 1 и очевидного замечания, что $\bar{C}$ содержит вершину конуса C, если последний не пуст.

Пусть H — замкнутая гиперплоскость в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$; она имеет уравнение вида $f(x) = \alpha$, где f — ненулевая непрерывная линейная форма на E (гл. I, § 2, теорема 1). Поэтому полупространства, определенные соответственно неравенствами $f(x) \leqslant \alpha$ и $f(x) \geqslant \alpha$, являются *замкнутыми* выпуклыми множествами, а их дополнения, определенные соответственно неравенствами $f(x) > \alpha$ и $f(x) < \alpha$, — *открытые* выпуклые множества. Мы будем называть эти полупространства замкнутыми (соотв. открытыми) полупространствами, *определяемыми гиперплоскостью H*.

Предложение 16. *Пусть E — топологическое векторное пространство и A — множество в нем, содержащее по крайней мере одну внутреннюю точку и такое, что все его точки лежат по одну сторону от гиперплоскости H. Тогда H замкнута, внутренние точки множества A лежат строго по одну сторону от H и точки прикосновения множества A лежат по одну сторону от H.*

Действительно, предположим, что H проходит через начало и имеет уравнение $f(x)=0$, и пусть, например, $f(x)\geqslant 0$ для всех точек $x\in A$. Полупространство, образованное точками y, для которых $f(y)>-1$, содержит по крайней мере одну внутреннюю точку, и путем переноса убеждаемся в том, что то же верно для полупространства, образованного точками y с $f(y)>0$. Это доказывает, что H замкнуто (гл. I, § 2, следствие предложения 1). Как мы знаем, тогда f есть гомоморфизм E на $\mathbf{R}$ (гл. I, § 2, следствие 1 теоремы 1) и, следовательно, $f(\mathring{A})$ — открытое множество в $\mathbf{R}$; оно не может содержать 0, так как иначе содержало бы и отрицательные числа, в противоречие с предположением; следовательно, оно содержится в открытом интервале $]0, +\infty[$. С другой стороны, полупространство тех y, для которых $f(y)\geqslant 0$, замкнуто и содержит A, а следовательно, и $\overline{A}$.

Упражнения. 1) Подмножество A векторного пространства E над $\mathbf{R}$ называется *звездным* (относительно точки 0), если $0\in A$ и вместе с точкой $x\in A$ множеству A принадлежат также точки λx для всех λ, заключеиных между 0 и 1. Пусть A — звездное множество, для каждой точки x которого существует $\mu>1$ такое, что $\mu x\in A$. Показать, что если A вместе с каждой парой своих точек x, y содержит и точку $\frac{1}{2}(x+y)$, то оно выпукло. Дать пример невыпуклого звездного множества A, для которого $\frac{1}{2}(A+A)\subset A$.

2) Пусть в аффинном пространстве даны выпуклое множество A и любое содержащее его миожество B. Показать, что среди выпуклых множеств, содержащих A и содержащихся в B, имеется по крайней мере одно максимальное; дать пример, где имеются различные максимальные выпуклые множества, содержащие A и содержащиеся в B.

3) Пусть A и B — два непересекающихся выпуклых множества в аффиином пространстве E. Показать, что в E существуют непересекающиеся выпуклые миожества C, D такие, что $A\subset C$, $B\subset D$ и $C\cup D=E$. [Применить теорему Цорна к множеству всех пар M, N непересекающих выпуклых множеств таких, что $A\subset M$, $B\subset N$.]

4) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, обладающее счетным базисом (e_n), и C — множество всех точек $x = \sum_n \xi_n e_n$ таких, что $\xi_n > 0$ для наибольшего индекса n, при котором $\xi_n \neq 0$. Показать что C есть заостренный выпуклый конус, причем $C \cap (-C) = \{0\}$ и $C \cup (-C) = E$. Вывести отсюда, что C есть множество всех элементов $\geqslant 0$ для структуры порядка в E, согласующейся со структурой векторного пространства и превращающей E в совершенно упорядоченное множество. Показать, что на этом упорядоченном векторном пространстве не существует положительной линейной формы, не равной тождественно нулю.

5) Пусть E — аффинное пространство и f — взаимно однозначное отображение его на себя. Показать, что если f переводит каждое выпуклое множество в выпуклое множество, то f есть аффинное линейное отображение. [Воспользоваться тем, что замкнутый отрезок есть пересечение выпуклых множеств, содержащих оба его конца; см. Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение II, упражнение 7.]

6) Дать пример пары выпуклых множеств $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}^2$, для которой образ выпуклого множества $A \times B$ при билинейном отображении $(\lambda, x) \to \lambda x$ пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^2$ не был бы выпуклым.

7) Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — конечное число выпуклых множеств в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$, W_i — векторное подпространство, полученное путем переноса аффинного линейного многообразия, порожденного множеством A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, и W — подпространство $\sum_{i=1}^{p} W_i$. Показать, что аффинное линейное многообразие, порожденное выпуклым миожеством $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ (где числа λ_i отличны от нуля), получается переносом из W.

*8) Пусть A — любое множество в $\mathbf{R}^n$.

а) Показать, что выпуклая оболочка множества A совпадает с множеством всех точек $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$, где $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. [Установить сначала следующую лемму: если $p+1$ точек x_i $(0 \leqslant i \leqslant p)$ образуют аффинно зависимую систему (т. е. существует соотношение $\sum_{i=0}^{p} \beta_i x_i = 0$, где β_i не все равны нулю и $\sum_{i=0}^{p} \beta_i = 0$) и $x = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i$, где все $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$, то существуют индекс k и p чисел γ_i $(i \neq k)$ такие, что все $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum_{i \neq k} \gamma_i = 1$ и $x = \sum_{i \neq k} \gamma_i x_i$; для этого сравнить числа $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$, имеющие смысл.]

б) Пусть a — точка выпуклой оболочки множества A, не принадлежащая выпуклой оболочке никакого подмножества из A, содержащего не более n элементов. Показать, что тогда A обладает по меньшей мере $n+1$ связными компонентами. [Можно считать $a=0$. Пусть $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ — аффинно независимое семейство $n+1$ точек из A, выпуклая оболочка которого содержит 0 (см. а)), и пусть C_i, для каждого индекса i, — заостренный выпуклый конус с вершиной 0, порожденный точками b_j с индексами $j\neq i$. Показать, что A не пересекается с границей ни одного из конусов — C_i.]

в) Показать, что если A — заостренный конус с вершиной 0, то его выпуклая оболочка совпадает с миожеством всех точек $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, где $x_i\in A$ и $\lambda_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.

9) а) Показать, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ каждое n-мерное выпуклое множество A обладает по крайней мере одной внутренней точкой. [Рассмотреть аффинно независимую систему $n+1$ точек из A.]

б) Пусть $E=L^1(\mathbf{N})$ — пространство абсолютно сходящихся рядов $x=(\xi_n)$ вещественных чисел (гл. I, § 1, n° 2). Показать, что множество P тех x, для которых все $\xi_n\geqslant 0$, есть выступающий выпуклый конус, порождающий E, но не содержащий ни одной внутренней точки.

10) Показать, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ каждое непустое открытое выпуклое множество гомеоморфно $\mathbf{R}^n$. [Использовать упражнение 12 из Общ. топ., гл. VI, § 2 ([7]).]

11) Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и A — замкнутое выпуклое множество в E. Пусть $V(x)$, для каждого $x\in A$, — объединение всех прямых, проходящих через x и содержащихся в A. Показать, что $V(x)$ есть замкнутое линейное многообразие и что $V(x)$ и $V(y)$ для любых двух точек x и y из A получаются друг из друга путем переноса. Вывести отсюда, что если W — замкнутое векторное подпространство, получающееся путем переноса любого $V(x)$, и φ — канонический гомоморфизм E на E/W, то $A=\varphi^{-1}(B)$, где B — замкнутое выпуклое множество в E/W, не содержащее никакой прямой.

12) Пусть A — неограниченное замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$. Показать, что для любой точки $x\in A$ существует по крайней мере одна замкнутая полупрямая с началом x, содержащаяся в A. Множество $C(x)$ всех содержащихся в A замкнутых полупрямых с началом x есть замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$. Конусы $C(x)$ и $C(y)$ для любых двух точек x и y из A получаются друг из друга путем переноса.

13) Пусть C — выступающий замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной 0. Показать, что дополнение множества $C\cap\mathbf{S}_{n-1}$ по отношению к сфере $\mathbf{S}_{n-1}$ гомеоморфно $\mathbf{R}^{n-1}$. [Произвести стереографическую проекцию из точки множества $C\cap\mathbf{S}_{n-1}$ и воспользоваться упражнением 12 из Общ. топ., гл. VI, § 2 ([7]).]

Показать, что если C обладает внутренней точкой, то $C \cap \mathbf{S}_{n-1}$ гомеоморфно замкнутому шару $\mathbf{B}_{n-1}$. [Тем же методом.]

14) Пусть A — неограниченное замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, не содержащее никакой прямой и обладающее по крайней мере одной внутренней точкой. Показать, что граница A гомеоморфна $\mathbf{R}^{n-1}$. [Воспользоваться упражнениями 12 и 13.]

15) Показать, что для замкнутости выпуклого множества в пространстве $\mathbf{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто его пересечение со всякой прямой [см. § 5, упражнение 12].

*16) а) Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ $r > n+1$ выпуклых множеств в пространстве $\mathbf{R}^n$, каждые $r-1$ из которых имеют непустое пересечение. Показать, что тогда все r множеств A_i имеют непустое пересечение. [Пусть x_i — точка, принадлежащая пересечению всех множеств A_j с индексами $j \neq i$; существуют r чисел λ_i, из которых хоть одно отлично от нуля, таких, что $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$; сгруппировать в этом равенстве члены с коэффициентами $\lambda_i \geqslant 0$ и члены с коэффициентами $\lambda_i < 0$.]

б) Пусть $\mathfrak{M}$ — множество компактных выпуклых множеств в $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы оно имело непустое пересечение, достаточно, чтобы пересечение любых $n+1$ его множеств было не пусто.

17) Показать, что в топологическом векторном пространстве над $\mathbf{R}$ выпуклая оболочка открытого множества есть открытое множество.

18) Пусть M — всюду плотное выпуклое множество в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$. Показать, что $H \cap M$ для любой замкнутой гиперплоскости H из E плотно в H. [Для каждой точки $x_0 \in H$ и каждой уравновешенной окрестности нуля V в E рассмотреть пересечение множества $x_0 + V$ с открытыми полупространствами, определяемыми гиперплоскостью H, и установить, что $x_0 + V + V$ содержит точку миожества $H \cap M$.]

19) Пусть E — бесконечномерное топологическое векторное пространство, содержащее тотальное счетное множество (например, нормированное пространство $L^1(\mathbf{N})$ абсолютно сходящихся рядов). Показать, что в E существуют два непересекающихся всюду плотных выпуклых множества A, B таких, что $A \cup B = E$. [Заметив, что E содержит всюду плотное свободное семейство (e_n), воспользоваться упражнениями 3 и 4.] Показать, что каждое из множеств A, B порождает (алгебраически) E.

20) Показать, что в топологическом векторном пространстве граница каждого выпуклого множества, содержащего внутреннюю точку, нигде не плотна. [Воспользоваться предложением 15.]

21) Пусть A — замкнутое выпуклое множество в отделимом топологическом векторном пространстве E, обладающее внутренней точкой, и H — проходящая через нее замкнутая гиперплоскость. Показать, что пересечение гиперплоскости H с границей F множества A нигде не

плотно в F. [Доказательство того, что в каждой окрестности точки множества $H \cap F$ содержится точка из F, не принадлежащая H, свести к случаю двумерного E.]

*22) Пусть A — связное замкнутое множество в отделимом топологическом векторном пространстве E, обладающее следующим свойством: каждое $x \in A$ имеет замкнутую окрестность V такую, что $V \cap A$ выпукло. Показать, что A выпукло. Для этого установить последовательно следующие свойства:

а) Показать, что любые две точки из A могут быть соединены ломаной, содержащейся в A. [Использовать то, что множество точек из A, соединимых с точкой $a \in A$ ломаной, содержащейся в A, открыто и замкнуто в A.]

б) Показать, что если две точки из A соединимы n-звенной ломаной, содержащейся в A ($n > 1$), то они соединимы также $(n-1)$-звенной ломаной, содержащейся в A. [Индукцией по n свести к случаю $n = 2$, что позволит считать $E = \mathbf{R}^2$; пусть тогда T — треугольник с вершинами a, b, c, стороны которого ac и bc, включая концы, содержатся в A, а ab — нет; рассмотреть точку прикосновения пересечения миожества $\mathbf{C}A$ с внутренностью треугольника T, наиболее удаленную от прямой, проходящей через a и b, и показать, что существование такой точки противоречит предположению.]

*23) а) Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство, B — непустое замкиутое выпуклое множество в E, X — непустое компактное множество в E. Показать, что если A — множество в E, для которого $A + X \subset B + X$, то $A \subset B$. [Для $a \in A$ рассмотреть последовательность (x_n) точек из X, рекуррентно определяемую соотношениями $a + x_n = b_n + x_{n+1}$, где $b_n \in B$.] Вывести отсюда, что если A и B — два непустых замкнутых выпуклых множества в E и X — непустое компактное множество в E, то из $A + X = B + X$ следует $A = B$.

б) Пусть E — нормированное пространство и σ — расстояние, определенное в множестве $\mathfrak{F}(E)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства E как указано в упражиении 7 из Общ. топ., гл. IX, § 2 ([8]). Показать, что для любых трех непустых компактных выпуклых множеств A, B, C в E имеет место равеиство $\sigma(A + C, B + C) = \sigma(A, B)$. [Принять во внимание, что $A + S_\lambda$ и $B + S_\lambda$, где S_λ — замкнутый шар $\|x\| \leqslant \lambda$, — замкиутые выпуклые множества, и использовать а).]

в) Вывести из а) и б), что множество $\mathfrak{K}(E)$ всех непустых компактных выпуклых множеств в нормированном пространстве, снабжённое расстоянием σ, можно отождествить с конусом в нормированном пространстве, сложение и умножение на скаляры в котором индуцируют в $\mathfrak{K}(E)$ операции $(A, B) \to A + B$ и $(\lambda, A) \to \lambda A$.

§ 2. Локально выпуклые пространства

1. Определение локально выпуклого пространства

Определение 1. *Топологию $\mathcal{T}$ в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ называют локально выпуклой, если она согласуется со структурой векторного пространства в E и обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, образованной из выпуклых множеств. Векторное пространство над $\mathbf{R}$, наделенное локально выпуклой топологией, называется вещественным локально выпуклым топологическим векторным пространством* (или просто *вещественным локально выпуклым пространством*, или *локально выпуклым пространством*, если это не может породить недоразумений).

Топологические векторные пространства над $\mathbf{R}$, рассматриваемые дальше в этой книге, в своем большинстве будут локально выпуклы.

Пусть V — выпуклая окрестность нуля в локально выпуклом пространстве E; тогда $V \cap (-V)$ — симметричная выпуклая окрестность нуля. Таким образом, в силу аксиомы (O_{III}) (Общ. топ., гл. I, § 6, n° 7), *замкнутые симметричные выпуклые* окрестности нуля образуют в E фундаментальную систему окрестностей нуля, инвариантную относительно всех гомотетий с коэффициентами >0 и центром 0.

Обратно, пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\mathfrak{S}$ — базис фильтра, образованный *симметричными выпуклыми поглощающими* множествами из E. Так как, очевидно, каждое симметричное выпуклое множество уравновешенно, то множество $\mathfrak{B}$ образов множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях с коэффициентами >0 и центром 0 есть базис фильтра в E, удовлетворяющий условиям (EV_I) и (EV_{II}) гл. I, § 1, n° 3; он удовлетворяет и условию (EV_{III}), ибо для каждого множества $V \in \mathfrak{S}$ имеем $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$. Следовательно, базис фильтра $\mathfrak{B}$ есть фундаментальная система окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ в E. Заметим, впрочем, что и множества $\frac{1}{n}V$, где V пробегает $\mathfrak{S}$, а n — множество всех целых чисел >0, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathcal{T}$. Для отделимости топологии $\mathcal{T}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \neq 0$ из E существовали целое n и множество $V \in \mathfrak{S}$ такие, что $nx \notin V$. Если,

кроме того, $\mathfrak{S}$ счетно, то $\mathfrak{T}$ — метризуемая локально выпуклая топология.

Примеры. 1) Пространство $\mathbf{R}^n$ локально выпукло, поскольку открытые кубы с центром 0 выпуклы (§ 1, предложение 6).

2) Нормированное пространство локально выпукло, поскольку шары с центром 0 образуют фундаментальную систему выпуклых окрестностей нуля.

3) Пусть E — произвольное векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\mathfrak{B}$ — множество *всех* поглощающих симметричных выпуклых множеств из E. В силу сказанного выше, $\mathfrak{B}$ есть фундаментальная система окрестностей нуля для локально выпуклой топологии $\mathfrak{T}_\omega$, являющейся, очевидно, *сильнейшей* из локально выпуклых топологий в E. Эта топология отделима. Действительно, пусть x — любая ненулевая точка из E; E обладает базисом (e_ι), содержащим x в качестве одного из своих элементов, скажем e_α; множество всех $y = \sum_\iota y_\iota e_\iota$, для которых $|y_\alpha| < 1$, есть поглощающее симметричное выпуклое множество, не содержащее x.

Если E конечномерно, то $\mathfrak{T}_\omega$, очевидно, совпадает с единственной отделимой топологией, согласующейся со структурой векторного пространства в E (гл. I, § 2, теорема 2); это показывает, что каждое поглощающее выпуклое множество в E содержит внутреннюю точку (см. § 1, упражнение 9).

4) Пусть X — отделимое топологическое пространство, $E = \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(X)$ — пространство всех непрерывных числовых функций на X, наделенное топологией компактной сходимости (гл. I, § 1, n° 1, пример 4). Пространство E локально выпукло. Действительно, пусть H — компактное множество из E и ε — число >0; множество всех функций $u \in E$, для которых $|u(x)| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было $x \in H$, очевидно, выпукло.

Ясно, что каждое векторное подпространство M локально выпуклого пространства E локально выпукло. То же верно и для факторпространства E/M. Действительно, пусть φ — каноническое отображение E на E/M. Для каждой выпуклой окрестности нуля U из E, $\varphi(U)$ есть выпуклая окрестность нуля в E/M (§ 1, предложение 2) и множества $\varphi(U)$ образуют в E/M фундаментальную систему окрестностей нуля.

Пополнение $\hat{E}$ отделимого локально выпуклого пространства E локально выпукло. Действительно, замыкания в $\hat{E}$ множеств, составляющих фундаментальную систему окрестностей нуля в E, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\hat{E}$, а замыкание выпуклого множества выпукло (§ 1, предложение 14).

Вещественным пространством Фреше мы называем полное метризуемое локально выпуклое пространство. Таким образом, каждое вещественное банаховское пространство есть пространство Фреше.

2. Два метода введения локально выпуклой топологии

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств и f_ι, для каждого ι, — линейное отображение E в E_ι. Как мы знаем (гл. I, § 1, n° 9), топология $\mathfrak{T}_0$ в E, определенная как слабейшая из топологий, при которых непрерывны все функции f_ι, согласуется со структурой векторного пространства в E; кроме того, она *локально выпукла*, ибо фильтр окрестностей нуля для $\mathfrak{T}_0$ порождается множествами вида $f_\iota^{-1}(V_\iota)$, где V_ι, для каждого $\iota\in I$, пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля в E_ι, которые можно предполагать здесь выпуклыми.

В частности, каждое произведение локально выпуклых пространств локально выпукло. Точно так же верхняя грань семейства локально выпуклых топологий в векторном пространстве E есть локально выпуклая топология.

Топологию, индуцируемую топологией локально выпуклого пространства E в его векторном подпространстве F, можно также рассматривать как слабейшую из топологий, при которых непрерывно каноническое отображение F в E.

Пусть теперь E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство топологических векторных пространств над $\mathbf{R}$ и g_α для каждого $\alpha\in A$ — линейное отображение F_α в E. Рассмотрим множество Φ *локально выпуклых* топологий в E, при которых *каждая* из функций g_α непрерывна. Множество Φ не пусто, поскольку содержит слабейшую топологию в E. Пусть $\mathfrak{T}$ — верхняя грань множества Φ. Каждая из функций g_α остается непрерывной и при наделении E топологией $\mathfrak{T}$. Действительно, каждая окрестность нуля для $\mathfrak{T}$ содержит множество вида $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} V_i$, где V_i — окрестность нуля для некоторой топологии $\mathfrak{T}_i\in\Phi$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; так как каждое из множеств $g_\alpha^{-1}(V_i)$ есть окрестность нуля в F_α, то это верно и для их пересечения, равного $g_\alpha^{-1}\left(\bigcap_i V_i\right)$, откуда и следует наше утвержде-

ние. Таким образом, топология $\mathcal{T}$ принадлежит Φ; иными словами, это — *сильнейшая из локально выпуклых топологий в E, при которых непрерывны все g_α.*

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{T}$ — сильнейшая из локально выпуклых топологий в векторном пространстве E, при которых непрерывны линейные отображения g_α топологических векторных пространств F_α в E. Множество $\mathfrak{V}$ всех поглощающих уравновешенных выпуклых множеств V из E таких, что $g_\alpha^{-1}(V)$ есть окрестность нуля в F_α для каждого α, является фундаментальной системой окрестностей нуля для $\mathcal{T}$.*

Действительно, $\mathfrak{V}$ есть базис фильтра, инвариантный относительно всех гомотетий с коэффициентами > 0 и центром 0; следовательно (n° 1), $\mathfrak{V}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}'$ в E. По определению топологии $\mathcal{T}$, каждая уравновешенная выпуклая окрестность нуля для $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathfrak{V}$, так что $\mathcal{T}$ мажорируется топологией $\mathcal{T}'$; с другой стороны, так как каждая из функций g_α, очевидно, непрерывна в топологии $\mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}'$ мажорируется топологией $\mathcal{T}$, чем доказательство и завершается. —

Следствие. *Пусть h — линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство G. Для того чтобы h было непрерывно на E, наделенном топологией $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $h \circ g_\alpha$ было непрерывно на F_α для каждого индекса α.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, если это условие выполнено и W — произвольная уравновешенная выпуклая окрестность нуля в G, то $g_\alpha^{-1}\left(h^{-1}(W)\right)$ для каждого индекса α есть окрестность нуля в F_α; так как $h^{-1}(W)$ — поглощающее уравновешенное выпуклое множество, то заключаем, что $h^{-1}(W)$ есть окрестность нуля для $\mathcal{T}$. Следовательно, отображение h непрерывно.

Фактортопология в векторном факторпространстве E/M локально выпуклого пространства E по векторному подпространству M есть сильнейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывно каноническое отображение φ пространства E на E/M.

3. Топологическая прямая сумма семейства локально выпуклых пространств

Предложение 2. *Пусть E — локально выпуклое пространство, являющееся топологической прямой суммой* (гл. I, § 1, п° 8) *конечного семейства $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ его векторных подпространств, и $f_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ — их канонические отображения в E. Топология $\mathfrak{T}$ пространства E есть сильнейшая локально выпуклая топология, при которой все f_i непрерывны.*

Пусть $\mathfrak{T}'$ — эта последняя топология. Достаточно показать, что всякая выпуклая окрестность нуля V для $\mathfrak{T}'$ есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}$. Но $V \cap M_i$ для каждого индекса i есть окрестность нуля в M_i, следовательно, $\sum_{i=1}^{n} (V \cap M_i)$ есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}$. С другой стороны, будучи выпуклым, V содержит $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (V \cap M_i)$.

Предложением 2 оправдывается введение следующего определения.

Определение 2. *Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств, E — прямая сумма векторных пространств $(F_\iota)_{\iota\in I}$* (Алг., гл. II, § 1, п° 7) *и f_ι, для каждого $\iota\in I$, — каноническое отображение F_ι в E. Топологической прямой суммой семейства (F_ι) называется пространство E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой все f_ι непрерывны (а эта топология называется прямой суммой топологий пространств F_ι).*

Пусть $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ — любое разбиение множества I и G_λ, для каждого λ, — топологическая прямая сумма семейства $(F_\iota)_{\iota\in J_\lambda}$. Из следствия предложения 1, примененного к тождественному отображению E на себя, сразу вытекает, что E является также топологической прямой суммой семейства $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$.

4. Индуктивные пределы локально выпуклых топологий

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство его векторных подпространств и $\mathfrak{T}_\alpha$, для каждого индекса α, — топология, согласующаяся со структурой векторного пространства в E_α. Пусть φ_α — каноническое отображение E_α в E и $\mathfrak{T}$ — сильнейшая

локально выпуклая топология в E, при которой непрерывны линейные отображения φ_α. В силу предложения 1, симметричные выпуклые поглощающие множества V такие, что $V \cap E_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}_\alpha$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$.

Если E порождается объединением всех E_α, то фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$ можно получить также рассматривая все семейства $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$, где V_α, для каждого $\alpha \in A$, — произвольная симметричная окрестность нуля для $\mathfrak{T}_\alpha$, и образуя для каждого такого семейства выпуклую оболочку его объединения. Действительно, в силу предположения, эта выпуклая оболочка есть поглощающее множество, и, содержа все V_α, она является окрестностью нуля для $\mathfrak{T}$. С другой стороны, ясно, что каждая симметричная выпуклая окрестность нуля V для $\mathfrak{T}$ содержит выпуклую оболочку всех $V \cap E_\alpha$.

Заметим, что если все $E_\alpha = E$ и топологии $\mathfrak{T}_\alpha$ локально выпуклы, то топология $\mathfrak{T}$ есть не что иное, как *нижняя грань* семейства $(\mathfrak{T}_\alpha)$ в множестве всех локально выпуклых топологий в E.

Для того чтобы линейное отображение h пространства E в локально выпуклое пространство G было непрерывно в топологии $\mathfrak{T}$, необходимо и достаточно, чтобы его сужение на E_α было непрерывно в топологии $\mathfrak{T}_\alpha$ для каждого α (следствие предложения 1).

Замечание. Пусть $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ — второе семейство векторных подпространств пространства E и $\mathfrak{T}'_\lambda$, для каждого $\lambda \in L$, — топология в F_λ, согласующаяся со структурой векторного пространства. Предположим, что для каждого $\lambda \in L$ существует $\alpha \in A$ такое, что $F_\lambda \subset E_\alpha$ и $\mathfrak{T}'_\lambda$ мажорирует топологию, индуцируемую в F_λ топологией $\mathfrak{T}_\alpha$. Пусть, наконец, φ_α (соотв. ψ_λ) — каноническое отображение E_α (соотв. F_λ) в E и $\mathfrak{T}$ (соотв. $\mathfrak{T}'$) — сильнейшая локально выпуклая топология в E, при которой отображения φ_α (соотв. ψ_λ) непрерывны. Тогда $\mathfrak{T}$ мажорируется топологией $\mathfrak{T}'$. Действительно, если V — окрестность нуля для $\mathfrak{T}$, то $V \cap F_\lambda = (V \cap E_\alpha) \cap F_\lambda$ есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}'_\lambda$, так что V есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}'$.

Чаще всего в приложениях топологии $\mathfrak{T}_\alpha$ локально выпуклы, а семейство (E_α) — *фильтрующееся* относительно включения $\subset$, причем если $E_\alpha \subset E_\beta$, то $\mathfrak{T}_\beta$ индуцирует в E_α топологию, *мажорируемую* топологией $\mathfrak{T}_\alpha$. При этих условиях говорят, что $\mathfrak{T}$ есть *индуктивный предел* топологий $\mathfrak{T}_\alpha$.

Примеры. 1) Пусть E — векторное пространство и $\mathfrak{F}$ — множество всех его конечномерных векторных подпространств (фильтрующееся

относительно включения $\subset$). Пусть $\mathfrak{T}_F$ в каждом $F \in \mathfrak{F}$ — единственная отделимая (локально выпуклая) топология, согласующаяся со структурой векторного пространства в F. Индуктивный предел топологий $\mathfrak{T}_F$ есть не что иное, как сильнейшая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}_\omega$ в E (n° 1, пример 3). Действительно, какова бы ни была симметричная выпуклая окрестность нуля V для $\mathfrak{T}_\omega$, $V \cap F$ есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}_F$, поскольку это — поглощающее симметричное выпуклое множество.

2) Пусть E — *топологическая прямая сумма* семейства $(F_\iota)_{\iota \in I}$ локально выпуклых пространств (n° 3, определение 2). Так как объединение всех F_ι порождает E, то мы получим фундаментальную систему окрестностей нуля в E, образуя для *каждого* семейства $(V_\iota)_{\iota \in I}$, где V_ι — симметричная выпуклая окрестность нуля в F_ι, выпуклую оболочку объединения множеств V_ι в E. Пусть F_H, для каждого $H \subset I$,— подпространство в E, являющееся прямой суммой подпространств F_ι ($\iota \in H$), и $\mathfrak{T}_H$ — прямая сумма топологий пространств F_ι ($\iota \in H$). Из данного только что описания окрестностей нуля в E непосредственно следует, что $\mathfrak{T}_H$ есть топология, индуцируемая в F_H топологией $\mathfrak{T}$ пространства E, а $\mathfrak{T}$ есть индуктивный предел топологий $\mathfrak{T}_H$, когда H пробегает фильтрующееся (относительно включения $\subset$) множество подмножеств из I, объединением которых служит всё I.

Пусть E — произвольное векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — базис E над $\mathbf{R}$ (Алг., гл. II, § 3, n° 1); E есть прямая сумма одномерных подпространств $F_\iota = \mathbf{R}e_\iota$, и ясно, что E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией $\mathfrak{T}_\omega$, есть топологическая прямая сумма подпространств F_ι.

3) Пусть X — локально компактное пространство и E — векторное пространство всех непрерывных числовых функций f на E, равных нулю, каждая, вне некоторого компактного множества (зависящего от f). Пусть E_K, для каждого компактного множества $K \subset X$, — векторное подпространство функций $f \in E$, равных нулю вне K, и $\mathfrak{T}_K$ — топология, индуцируемая в E_K топологией $\mathfrak{T}_u$ равномерной сходимости на E. Индуктивный предел $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_K$ мажорирует топологию $\mathfrak{T}_u$; можно показать, что если E обладает счетным базисом окрестностей бесконечности, то $\mathfrak{T}$ сильнее чем $\mathfrak{T}_u$ [Интегрир., гл. III, § 2, упражнения 1, 2 и 3 (⁹)]. Линейные формы на E, непрерывные в топологии $\mathfrak{T}$, суть не что иное, как меры на X по самому определению последних (там же).

Замечания. 1) Пусть $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство локально выпуклых пространств, g_α, для каждого $\alpha \in A$, — линейное отображение F_α в векторное пространство E над $\mathbf{R}$ и F — *топологическая прямая сумма* пространств F_α. Определим линейное отображение g пространства F в E, для каждого $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \in F$ положив $g(x) = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x_\alpha)$. Сильнейшая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}$ в E, при которой непрерывны

все g_α, *совпадает* с сильнейшей локально выпуклой топологией $\mathfrak{T}'$ в E, при которой непрерывно g. Действительно, так как g_α есть сужение g на F_α, то все g_α непрерывны в топологии $\mathfrak{T}'$, так что она мажорируется топологией $\mathfrak{T}$; но и обратно, g непрерывно в топологии $\mathfrak{T}$ (следствие предложения 1), так что она мажорируется топологией $\mathfrak{T}'$.

Если E порождается объединением подпространств $g_\alpha(F_\alpha)$, то g есть отображение F *на* E; поэтому E можно отождествить с F/N, где N — ядро отображения g, а $\mathfrak{T}$ — с *фактортопологией* топологии пространства F по подпространству N.

2) Читатель подметил некую „двойственность" между описанными выше двумя методами введения локально выпуклой топологии; одним охватываются как частные случаи индуцированная топология подпространства, произведение топологий и верхняя грань семейства топологий, другим — фактортопология, прямая сумма топологий и нижняя грань семейства топологий. Некоторые аспекты этого соответствия получат более точное выражение в гл. IV *).

3) В предыдущих примерах семейство (E_α) было фильтрующимся относительно включения $\subset$ и, кроме того, при $E_\alpha \subset E_\beta$ топология, индуцируемая в E_α топологией $\mathfrak{T}_\beta$, *совпадала* с $\mathfrak{T}_\alpha$. Неизвестно, не будет ли топология, индуцируемая индуктивным пределом $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_\alpha$ в каждом из E_α, уже при одних этих условиях всегда совпадать с $\mathfrak{T}_\alpha$, как это имеет место во всех рассмотренных примерах. Заметим, что такое заключение всегда справедливо, если в E существует локально выпуклая топология $\mathfrak{T}'$, индуцирующая в каждом E_α топологию $\mathfrak{T}_\alpha$: действительно, тогда $\mathfrak{T}$ по определению мажорирует топологию $\mathfrak{T}'$, так что топология, которую $\mathfrak{T}$ индуцирует в E_α, мажорирует топологию $\mathfrak{T}_\alpha$; и так как по определению $\mathfrak{T}$ индуцирует в E_α топологию, мажорируемую топологией $\mathfrak{T}_\alpha$, то наше утверждение доказано. В приведенном выше примере 3 топология $\mathfrak{T}_u$ в E есть как раз топология этого рода.

Мы укажем другой случай, где $\mathfrak{T}$ индуцирует в каждом подпространстве E_α его топологию $\mathfrak{T}_\alpha$.

5. *Строгий индуктивный предел последовательности подпространств*

Предложение 3. *Пусть E — векторное пространство над* **R** *и (E_n) — возрастающая последовательность его векторных подпространств, имеющая своим объединением всё E. Пусть в каждом E_n задана локально выпуклая топология $\mathfrak{T}_n$, причем для каждого n она совпадает с топологией, индуцируемой в E_n топологией $\mathfrak{T}_{n+1}$. Тогда топология, индуцируемая в каждом E_n индуктивным пределом $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_n$, совпадает с $\mathfrak{T}_n$.*

*) Это обещание осталось невыполненным. — *Прим. перев.*

Пусть $\mathfrak{T}'_n$ — топология, индуцируемая в E_n топологией $\mathfrak{T}$. По определению последней, $\mathfrak{T}'_n$ мажорируется топологией $\mathfrak{T}_n$. Покажем, что $\mathfrak{T}'_n$ мажорирует топологию $\mathfrak{T}_n$. Пусть V_n — выпуклая окрестность нуля в E_n для топологии $\mathfrak{T}_n$; мы построим возрастающую последовательность $(V_{n+p})_{p\geqslant 1}$ такую, что V_{n+p} будет выпуклой окрестностью нуля в E_{n+p} (для топологии $\mathfrak{T}_{n+p}$) и $V_{n+p}\cap E_n = V_n$ для каждого $p\geqslant 1$. Тогда объединение V множеств V_{n+p} будет выпуклым множеством таким, что $V\cap E_k$, для каждого k, — окрестность нуля для $\mathfrak{T}_k$, следовательно, V будет окрестностью нуля для $\mathfrak{T}$, и так как $V\cap E_n = V_n$, то тем самым предложение будет доказано.

Для построения множеств V_{n+p} достаточно применить индукцию по p, опираясь на следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть F — локально выпуклое пространство, M — его векторное подпространство и V — выпуклая окрестность нуля в M. Тогда в F существует выпуклая окрестность нуля W такая, что $W\cap M = V$. При этом если M замкнуто в F, то для каждой точки $x_0\in \complement M$ существует выпуклая окрестность нуля W_0 в F такая, что $W_0\cap M = V$ и $x_0\notin W_0$.*

Действительно, по предположению, в F существует окрестность нуля U такая, что $U\cap M\subset V$. Выпуклая оболочка W множества $U\cup V$ есть, очевидно, окрестность нуля в F. Покажем, что $W\cap M = V$. Действительно, каждая точка $z\in W$ имеет вид $\lambda x + (1-\lambda)y$, где $x\in V$, $y\in U$ и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ (§ 1, предложение 8). Если $z\in M$ и $\lambda\neq 1$, то необходимо $y\in M$, так что $y\in U\cap M\subset V$, и, следовательно, $z\in V$; то же заключение, очевидно, сохраняет силу и при $\lambda = 1$.

Если M замкнуто в F, то пространство F/M отделимо, так что в F существует окрестность нуля $U_0\subset U$ такая, что U_0 не пересекается с x_0+M; тогда выпуклая оболочка W_0 множества $U_0\cup V$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

При выполнении условий предложения 3 мы будем говорить, что пространство E, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, есть *строгий индуктивный предел* локально выпуклых пространств E_n.

Замечания. 1) Если все топологии $\mathfrak{T}_n$ отделимы, то из предложения 3 следует, что и $\mathfrak{T}$ отделима, поскольку каждая точка пространства E принадлежит некоторому E_n.

2) Если каждое из подпространств E_n *замкнуто* в E_{n+1} (в топологии $\mathfrak{T}_{n+1}$), то E_n замкнуто в топологии $\mathfrak{T}$. Действительно, индук-

цией по p сразу убеждаемся в том, что E_n замкнуто во всех пространствах E_{n+p}. Но каждая точка $x \in E$ принадлежит некоторому E_{n+p}; если $x \notin E_n$, то в E_{n+p} существует выпуклая окрестность нуля V_{n+p} такая, что $x + V_{n+p}$ не пересекается с E_n; так как, с другой стороны, существует окрестность нуля V (для $\mathfrak{T}$) такая, что $V \cap E_{n+p} = V_{n+p}$, то окрестность $x + V$ точки x для топологии $\mathfrak{T}$ не пересекается с E_n.

3) Пусть F — локально выпуклое пространство, являющееся объединением возрастающей последовательности (F_n) своих подпространств, и $\mathfrak{T}_n$, для каждого номера n, — топология, индуцируемая в F_n топологией $\mathfrak{T}$ пространства F. Не следует думать, что $\mathfrak{T}$ всегда совпадает с индуктивным пределом топологий $\mathfrak{T}_n$. Так, например, если (M_n) — бесконечная последовательность отделимых локально выпуклых пространств, не сводящихся к одному элементу 0, E — их произведение, F — прямая сумма всех M_n, рассматриваемая как часть E и наделенная топологией $\mathfrak{T}$, индуцированной из E, а F_n — сумма всех M_k с номерами $k \leqslant n$, то ясно, что топология $\mathfrak{T}$ отлична от индуктивного предела топологий $\mathfrak{T}_n$.

Упражнения. 1) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, A — его симметричное выпуклое подмножество, $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ — локально выпуклые топологии в E, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — определяемые ими равномерные структуры. Для того чтобы равномерная структура, которую $\mathcal{U}'$ индуцирует в A, мажорировала структуру, которую $\mathcal{U}$ индуцирует в A, необходимо и достаточно, чтобы каждая окрестность нуля для топологии, индуцируемой в A топологией $\mathfrak{T}$, была окрестностью нуля для топологии, индуцируемой топологией $\mathfrak{T}'$.

2) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией.

а) Показать, что каждое векторное подпространство в E замкнуто и что если M и N — взаимно дополнительные векторные подпространства в E, то E есть их топологическая прямая сумма.

б) Показать, что каждое линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство F непрерывно и притом является гомоморфизмом в F, если F наделено сильнейшей локально выпуклой топологией.

3) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, A — выпуклое множество в E, V — порождаемое им аффинное линейное многообразие. Будем говорить, что $x_0 \in A$ есть *окруженная* точка множества A, если x_0 — внутренняя точка множества A относительно V при сильнейшей локально выпуклой топологии в E.

а) Для того чтобы x_0 было окруженной точкой множества A, необходимо и достаточно, чтобы для каждой прямой D, проходящей через x_0 и принадлежащей V, $D \cap A$ содержало открытый отрезок, содержащий x_0.

б) Пусть f — аффинное линейное отображение пространства E в векторное пространство F; показать, что если x_0 — окруженная точка множества A, то $f(x_0)$ — окруженная точка множества $f(A)$ (см. упражнение 2б).

в) Пусть E и F — два векторных пространства и A (соотв. B) — выпуклое множество в A (соотв. B). Для того чтобы (x, y) было окруженной точкой множества $A \times B$, необходимо и достаточно, чтобы x было окруженной точкой множества A, а y — окруженной точкой множества B.

г) Пусть A и B — два выпуклых множества в векторном пространстве E. Показать, что если x — окруженная точка множества A и y — окруженная точка множества B, то каковы бы ни были скаляры α и β, $\alpha x + \beta y$ есть окруженная точка множества $\alpha A + \beta B$.

д) Пусть x_0 — окруженная точка выпуклого множества $A \subset E$. Показать, что x_0 есть также окруженная точка порождаемого им выпуклого конуса с вершиной 0.

е) Пусть A — выпуклое множество в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$, обладающее по крайней мере одной внутренней точкой. Показать, что множество всех окруженных точек множества A совпадает с его внутренностью (см. § 5, упражнение 12 и § 1, упражнение 15).

ж) Показать, что выпуклое множество P, определенное в упражнении 9б § 1, не содержит ни одной окруженной точки.

4) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, обладающее счетным базисом и наделенное сильнейшей топологией. Показать, что если пересечение выпуклого множества $A \subset E$ со всяким конечномерным подпространством замкнуто в E, то A замкнуто в E (см. § 5, упражнение 12).

*5) Пусть E и F — два векторных пространства над $\mathbf{R}$, наделенные оба сильнейшей локально выпуклой топологией.

а) Показать, что если каждое из этих пространств обладает счетным базисом, то всякое билинейное отображение произведения $E \times F$ в произвольное локально выпуклое пространство G непрерывно. [Воспользоваться теоремой Дюбуа-Реймона (Функц. вещ. перем., гл. V, Приложение, упражнение 8 ([10])).]

б) Показать, что если одно из пространств E, F обладает базисом континуальной мощности, то на $E \times F$ существует не непрерывная билинейная форма.

6) Пусть (E_n) — любая бесконечная последовательность локально выпуклых пространств и E — их топологическая прямая сумма. Показать, что топология пространства E совпадает с топологией $\mathfrak{T}_0$, определенной в упражнении 7 § 1 гл. I.

7) Пусть I — несчетное множество. Показать, что в векторном пространстве $E = \mathbf{R}^{(I)}$ сильнейшая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}$ отлична от топологии $\mathfrak{T}_0$, определенной в упражнении 7 § 1 гл. I.

Для этого доказать, что множество тех $x=(\xi_\iota)\in E$ ($\xi_\iota=0$, за исключением конечного числа индексов), для которых $\left|\sum_{\iota\in I}\xi_\iota\right|<1$, открыто в $\mathfrak{T}$, но не открыто в $\mathfrak{T}_0$.

8) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, обладающее счетным базисом (e_n), V — уравновешенная выпуклая оболочка множества всех e_n и W — уравновешенная выпуклая оболочка множества точек $a_n=e_n+(n-1)\,e_1$ ($n=1, 2, \ldots$). Пусть $\mathfrak{T}_1$ (соотв. $\mathfrak{T}_2$) — локально выпуклая топология, для которой множества λV (соотв. λW), где λ пробегает множество всех чисел >0, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Показать, что $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ отделимы, но их нижняя грань в множестве всех локально выпуклых топологий в E—не отделимая (см. § 3, упражнение 16).

*9) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, являющееся объединением возрастающей последовательности (E_n) своих векторных подпространств. Пусть $\mathfrak{T}_n$ для каждого n — локально выпуклая топология в E_n, мажорирующая топологию, индуцируемую в E_n топологией $\mathfrak{T}_{n+1}$. Предположим, что индуктивный предел $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_n$ отделим. Для того чтобы пространство E, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, было полным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого n и каждого фильтра Коши в топологии $\mathfrak{T}$, содержащегося в E_n, существовал номер $p\geqslant n$, для которого этот фильтр сходился бы в E_p в топологии, которую индуцирует $\mathfrak{T}$. [Для фильтра Коши $\mathfrak{F}$ в E рассмотреть фильтр Коши $\mathfrak{G}$ в E, базис которого образуют множества $M+V$, где M пробегает $\mathfrak{F}$, а V — фильтр окрестностей нуля в E. Свести к доказательству того, что след $\mathfrak{G}$ на E_n по крайней мере для одного n есть фильтр. Для этого рассуждать от противного, предположив, что для каждого n существуют множество $M_n\in\mathfrak{F}$ и симметричная выпуклая окрестность нуля V_n в E такие, что M_n мало порядка V_n, а M_n+V_n не пересекается с E_n, причем последовательность (V_n) — убывающая. Показать, что $\mathfrak{F}$ не может содержать никакого множества малого порядка W, где W — выпуклая оболочка объединения множеств $\frac{1}{2}(V_n\cap E_n)$; для этого рассмотреть для каждого n выпуклую оболочку W_n множества $\frac{1}{2}V_n$ и всех множеств $\frac{1}{2}(V_k\cap E_k)$ с $k<n$; установить существование множества $P_n\in\mathfrak{F}$ такого, что P_n+W_n не пересекается с E_n, и вывести отсюда, что для некоторого множества $Q\in\mathfrak{F}$ малого порядка W должен был бы существовать индекс n, для которого $Q\cap P_n=\varnothing$.]

В частности, если E — строгий индуктивный предел пространств E_n и каждое E_n замкнуто в E_{n+1}, то для полноты E необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было полно.

10) Пусть E — строгий индуктивный предел возрастающей последовательности локально выпуклых пространств E_n (n° 5). Показать, что топология пространства E является сильнейшей из топологий $\mathfrak{T}$ (безразлично — *локально выпуклых или нет*), согласующихся со

структурой векторного пространства в E и индуцирующих в каждом E_n топологию, мажорируемую топологией $\mathfrak{T}_n$. [Пусть V_0 — окрестность нуля для такой топологии $\mathfrak{T}$ и $(V_n)_{n\geqslant 0}$ — последовательность окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$ таких, что $V_{n+1}+V_{n+1}\subset V_n$ для каждого $n\geqslant 0$; рассмотреть в E_n, для каждого $n\geqslant 1$, выпуклую окрестность нуля W_n, содержащуюся в $E_n\cap V_n$, и образовать выпуклую оболочку объединения всех W_n.]

*11) Для каждого подмножества A аддитивной группы G и каждого целого $n>0$ обозначим через $\overset{n}{+}A$ множество всех элементов вида $\sum_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i\in A$ (см. Алг., гл. I, § 2, п° 9). Множество A в G называется *выпуклым*, если для каждого целого $n>0$ из $nx\in\overset{n}{+}A$ следует $x\in A$.

а) Показать, что если (аддитивно записываемая) топологическая коммутативная группа G изоморфна подгруппе локально выпуклого векторного пространства, то в G существует фундаментальная система симметричных выпуклых окрестностей нуля.

б) Обратно, пусть G — отделимая аддитивная топологическая коммутативная группа, в которой существует фундаментальная система $\mathfrak{V}$ симметричных выпуклых окрестностей нуля. Показать, что G — группа без кручения и может поэтому рассматриваться (алгебраически) как подгруппа вполне определенного векторного пространства E над $\mathbf{Q}$ (Алг., гл. III, § 2, п° 3). Пусть $\tilde{V}$ для каждого $V\in\mathfrak{V}$ — множество всех элементов вида rx, где $x\in V$, а r пробегает множество всех рациональных чисел от 0 до 1. Показать, что $\tilde{V}$ симметрично и выпукло (в определенном выше смысле). Вывести отсюда, что если, кроме того, в G не содержится никакой открытой подгруппы, отличной от самой G, то множества $\tilde{V}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой векторного пространства E над $\mathbf{Q}$. На этом основании установить, что G изоморфна подгруппе некоторого отделимого вещественного локально выпуклого пространства.

в) Пусть G — *лексикографически* упорядоченная аддитивная группа $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (Алг., гл. VI, § 1, п° 6). Отделимая топология $\mathfrak{T}_0(G)$ в G [Общ. топ., гл. IV, § 1, упражнение 2 ([11])] согласуется со структурой группы. Показать, что эта топология обладает фундаментальной системой симметричных выпуклых окрестностей нуля, но G не изоморфна никакой подгруппе какого бы то ни было отделимого топологического векторного пространства над $\mathbf{R}$.

§ 3. Отделение выпуклых множеств

1. Теорема Хана — Банаха (геометрическая форма)

Теорема 1 (Хан — Банах). *Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, A — непустое выпуклое открытое*

множество в E и M — линейное многообразие, не пересекающееся с A. Тогда существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающаяся с A.

Можно ограничиться тем случаем, когда M проходит через начало. Пусть $\mathscr{M}$ — множество всех векторных подпространств, содержащих M и не пересекающихся с A. $\mathscr{M}$ не пусто, поскольку содержит M, и, очевидно, индуктивно; кроме того, если $N \in \mathscr{M}$, то также $\overline{N} \in \mathscr{M}$. Пусть H — максимальный элемент в $\mathscr{M}$ (Теор. мн., Рез., § 6, п° 10); очевидно, H замкнуто. Остается показать, что H — гиперплоскость, или, иначе, что пространство E/H одномерно.

Пусть ψ — каноническое отображение E на $F = E/H$. $B = \psi(A)$ есть непустое выпуклое открытое множество в F, не содержащее нулевой точки, и, по определению H, в F нет ненулевого векторного подпространства, которое бы не пересекалось с B. Таким образом, достаточно показать, что при этих условиях F одномерно.

Предположим противное. Пусть $C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$ — выпуклый конус с вершиной 0, порожденный множеством B (§ 1, предложение 12); C — затупленный конус, открытый в F. Мы получим противоречие, если докажем, что в F существует элемент $x \neq 0$ такой, что прямая, проходящая через 0 и x, не пересекается с C, для чего достаточно, чтобы $x \notin C$ и $-x \notin C$. Пусть G — (открытое) дополнение к 0 в F. Так как F имеет размерность $\geqslant 2$, то G *связно*: действительно, любые две точки y и z из G содержатся в двумерном векторном подпространстве P пространства F, и так как P изоморфно $\mathbf{R}^2$, то $P \cap G$ связно (Общ. топ., гл. VI, § 2, предложение 5). Конус C не пуст и не совпадает с G, ибо из $C = G$ вытекало бы, что $0 \in C$. Следовательно, существует точка x, граничная для C относительно G и такая, что $x \notin C$. Так как $x \in G$, то $x \neq 0$; если бы $-x \in C$, то в силу предложения 15 § 1 мы имели бы $0 \in C$. Таким образом, $-x \notin C$, чем доказательство теоремы 1 и завершено.

Замечание. Если $0 \in M$, то теорему 1 можно также сформулировать следующим образом: *на E существует непрерывная линейная форма f такая, что $f(x) = 0$ на M и $f(x) > 0$ на A* (см. § 1, предложение 4).

2. *Отделение выпуклых множеств в топологических векторных пространствах*

Определение 1. *Говорят, что замкнутая гиперплоскость H в топологическом векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$ *отделяет непустые множества A и B, если A содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, а B — в другом.*

Определение 2. *Говорят, что замкнутая гиперплоскость H в топологическом векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$ *строго отделяет непустые множества A и B, если A содержится в одном из открытых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, а B — в другом.*

Предложение 1. *Пусть A — непустое открытое выпуклое множество в топологическом пространстве E над* $\mathbf{R}$ *и B — непустое выпуклое множество в E, не пересекающееся с A. Тогда в E существует замкнутая гиперплоскость H, отделяющая A и B.*

Действительно, $C = A - B$ есть непустое открытое выпуклое (§ 1, предложение 7) множество и $0 \notin C$. Следовательно, в силу теоремы 1 на E существует непрерывная линейная форма f такая, что $f(z) > 0$ для всех $z \in C$, так что $f(x) > f(y)$ для каждого $x \in A$ и каждого $y \in B$. Положим $\alpha = \inf\limits_{x \in A} f(x)$; α конечно, $f(x) \geqslant \alpha$ для каждого $x \in A$ и $f(y) \leqslant \alpha$ для каждого $y \in B$. Тем самым множества A и B отделяются замкнутой гиперплоскостью H, заданной уравнением $f(z) = \alpha$.

Замечания. 1) Гиперплоскость H не пересекается с A (§ 1 предложение 16); тем самым два непустых *открытых* выпуклых множества, не имеющих общих точек, *строго* отделяются некоторой замкнутой гиперплоскостью.

2) Напротив, если B — не открытое, то замкнутой гиперплоскости, строго отделяющей множества A и B, может не существовать, даже если E конечномерно и множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$ не пересекаются (упражнение 5).

Определение 3. *Опорной гиперплоскостью множества A в векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$ *называется гиперплоскость H, содержащая по крайней мере одну точку из A и такая, что все точки из A находятся по одну сторону от H.*

Пусть f — ненулевая линейная форма на E; сказать, что гиперплоскость, заданная уравнением $f(x) = \alpha$, есть опорная гиперплоскость множества A, все равно, что сказать, что α есть наименьший или наибольший элемент множества $f(A) \subset \mathbf{R}$. Иными словами, для того чтобы множество A обладало опорной гиперплоскостью, параллельной гиперплоскости, заданной уравнением $f(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы верхняя или нижняя грань множества $f(A)$ была конечной и принадлежала $f(A)$.

Предложение 2. *Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и A — непустое компактное множество в E. Для каждой замкнутой гиперплоскости H в E существует опорная гиперплоскость множества A, параллельная H.*

Действительно, пусть $f(x) = \gamma$ — уравнение гиперплоскости H. Так как f — непрерывная линейная форма на E, то ее сужение на A непрерывно, а потому ограниченно и принимает на A наибольшее и наименьшее значения (Общ. топ., гл. IV, § 6, теорема 1).

Это доказательство показывает, что A обладает одной или двумя опорными гиперплоскостями, параллельными H, причем первый случай имеет место лишь когда A целиком содержится в некоторой гиперплоскости, параллельной H.

Определение 4. *Выпуклым телом в топологическом векторном пространстве над $\mathbf{R}$ называется замкнутое выпуклое множество, обладающее по крайней мере одной внутренней точкой.*

Предложение 3. *Пусть A — выпуклое тело в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$. Каждая опорная гиперплоскость множества A замкнута и через каждую его граничную точку проходит по крайней мере одна опорная гиперплоскость.*

То, что каждая опорная гиперплоскость множества A замкнута, вытекает из того, что все точки из A находятся по одну сторону от такой гиперплоскости (§ 1, предложение 16). С другой стороны, граничная точка x_0 множества A не принадлежит непустому открытому выпуклому множеству $\mathring{A}$; поэтому, в силу теоремы 1, существует гиперплоскость H, проходящая через x_0 и не пересекающая $\mathring{A}$. Так как A есть замыкание множества $\mathring{A}$ (§ 1, следствие 1 предложения 15),

то из предложения 16 § 1 следует, что H служит опорной гиперплоскостью для A.

Следствие. *Каждое выпуклое тело A в топологическом векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$ *есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств, определяемых опорными гиперплоскостями этого тела.*

Действительно, пусть x — точка, не принадлежащая телу A, и y — его внутренняя точка. A пересекается с замкнутым отрезком, соединяющим x и y, по замкнутому отрезку с концами y и $z \neq x$, где z — граничная точка для A, так что $z \neq y$. Пусть H — опорная гиперплоскость тела A, проходящая через z; в силу предложения 16 § 1 то из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью H, которое содержит A, не содержит x.

3. *Отделение выпуклых множеств в локально выпуклом пространстве*

Предложение 4. *Пусть E — локально выпуклое пространство, A — непустое замкнутое выпуклое множество в E и K — компактное выпуклое множество в E, не пересекающееся с A. Тогда существует замкнутая гиперплоскость H, строго отделяющая A и K.*

Действительно, в E существует открытая выпуклая окрестность нуля V такая, что множества $A+V$ и $K+V$ не пересекаются (Общ. топ., гл. II, § 4, предложение 1). Так как $A+V$ и $K+V$ открыты и выпуклы в E, то предложение 1 показывает, что существует замкнутая гиперплоскость H, строго отделяющая $A+V$ и $K+V$ и тем более A и K.

Замечание. Пусть A и B — непустые замкнутые выпуклые множества без общих точек в отделимом локально выпуклом пространстве E. Если E *конечномерно*, то в E существует замкнутая гиперплоскость, отделяющая эти множества (упражнение 8); но если E бесконечномерно, то такое заключение уже необязательно справедливо (упражнение 7).

Следствие 1. *В локально выпуклом пространстве каждое замкнутое выпуклое множество A есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств.*

Действительно, в силу предложения 4, для каждой точки $x \notin A$ существует замкнутая гиперплоскость, строго отделяющая x и A.

Следствие 2. *В отделимом локально выпуклом пространстве каждое компактное выпуклое множество A есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств, определяемых опорными гиперплоскостями к A.*

Действительно, пусть $x \notin A$; так как множество $\{x\}$ замкнуто, то существует замкнутая гиперплоскость H, строго отделяющая x и A (предложение 4); пусть $f(x) = \alpha$ — ее уравнение (f — непрерывная линейная форма) и $f(x) > \alpha$ для всех $x \in A$. Положим $\gamma = \inf_{x \in A} f(x)$. Полупространство, заданное неравенством $f(x) \geqslant \gamma$, содержит A, определяется опорной гиперплоскостью, заданной уравнением $f(x) = \gamma$, и не содержит x.

В локально выпуклом пространстве некомпактное замкнутое выпуклое множество, не имеющее внутренних точек, может не обладать никакой замкнутой опорной гиперплоскостью (гл. V, § 2, упражнение 11; см. также гл. IV, § 5, упражнение 3б).

Следствие 3. *Каждое замкнутое линейное многообразие M в локально выпуклом пространстве есть пересечение содержащих его замкнутых гиперплоскостей.*

Действительно, пусть H для каждого $x \notin M$ — замкнутая гиперплоскость, строго отделяющая x и M, так что M параллельно H. Тогда гиперплоскость H_1, содержащая M и параллельная H, не содержит x.

Следствие 4. *Пусть C — замкнутое выпуклое множество в локально выпуклом пространстве E. Для того чтобы множество A из E содержалось в C, необходимо и достаточно, чтобы для каждой непрерывной линейной формы f на E выполнялось условие $f(A) \subset f(C)$.*

Действительно, если точка $x \in A$ не принадлежит C, то существует замкнутая гиперплоскость с уравнением $f(x) = \alpha$, строго отделяющая x и C, так что $f(x) \notin f(C)$.

Следствие 5. *Пусть E — локально выпуклое пространство, M — его векторное подпространство и f — линейная форма,*

определенная и непрерывная на M. Тогда существует непрерывная линейная форма $\overline{f}$, определенная на E и служащая продолжением для f.

Продолжив, если нужно, f по непрерывности, можно считать, что M замкнуто; кроме того, в силу тривиальности утверждения при $f=0$, можно ограничиться тем случаем, когда $f\neq 0$. Пусть N — линейное многообразие, составленное теми $x\in M$, для которых $f(x)=1$. Так как f непрерывна на M, то N замкнуто в E и $0\notin N$. Пусть H — замкнутая гиперплоскость в E, содержащая N и не содержащая 0 (следствие 3), и $\overline{f}(x)=1$ — ее уравнение, так что $\overline{f}$ — непрерывная линейная форма на E. Так как уравнения $f(x)=1$ и $\overline{f}(x)=1$ на M равносильны, то f и $\overline{f}$ на M совпадают, чем доказательство и завершено.

Замечание. Для каждого непрерывного линейного отображения g подпространства M в произведение $\mathbf{R}^I$ существует продолжающее его непрерывное линейное отображение g всего пространства E в $\mathbf{R}^I$. Действительно, $g=(g_\iota)$ $(\iota\in I)$, где g_ι — непрерывные линейные формы на M; если взять для каждого $\iota\in I$ непрерывную линейную форму $\overline{g}_\iota$ на E, служащую продолжением для g_ι, то непрерывное линейное отображение $\overline{g}=(\overline{g}_\iota)$ и будет требуемым продолжением для g.

Заметим, что непрерывное линейное отображение h векторного подпространства M в произвольное локально выпуклое пространство F уже необязательно допускает продолжение до непрерывного линейного отображения всего пространства E в F (гл. IV, § 2, упражнение 9в, § 4, упражнение 11 и § 5, упражнение 5в).

Следствие 6. *Для каждого конечномерного векторного подпространства M отделимого локально выпуклого пространства E существует замкнутое векторное подпространство N топологически дополнительное к M.*

Действительно, для того чтобы подпространство M в E обладало топологически дополнительным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы тождественное отображение M на себя продолжалось до непрерывного линейного отображения p пространства E на M, которое необходимо является тогда непрерывным проектором (гл. I, § 1, предложение 12). Но мы видели, что в случае конечномерного M такое продолжение действительно существует.

Напротив, как уже указывалось, в некоторых банаховских пространствах имеются замкнутые бесконечномерные подпространства, не обладающие топологическим дополнением (гл. IV, § 5, упражнение 5

Напомним, однако, что каждое замкнутое подпространство конечной факторразмерности обладает топологическим дополнением (гл. I § 2, предложение 3). С другой стороны, мы увидим, что в гильбертовом пространстве каждое замкнутое векторное подпространство обладает топологическим дополнением (гл. V)$_0$ (см. также гл. IV, § 1, упражнение 11д).

4. *Положительные линейные формы на упорядоченном векторном пространстве*

Предложение 5. *Пусть P — выступающий заостренный выпуклый конус в отделимом топологическом векторном пространстве E над* **R**, *обладающий по крайней мере одной внутренней точкой. Каждая линейная форма $f \neq 0$ на E, положительная относительно структуры порядка, определяемой конусом P* (§ 1, n° 5), *непрерывна. При этом $f(x) > 0$ для каждой внутренней точки x конуса P и $f(x) \geqslant 0$ для всех его точек прикосновения.*

Это сразу вытекает из предложения 16 § 1, примененного к множеству P и гиперплоскости, заданной уравнением $f(x) = 0$.

Предложение 6. *Пусть P — выступающий заостренный выпуклый конус в отделимом локально выпуклом пространстве E, обладающий по крайней мере одной внутренней точкой, и M — векторное подпространство в E, проходящее через внутреннюю точку x_0 конуса P. Для каждой положительной линейной формы f на M (относительно структуры порядка, определяемой конусом $P \cap M$) существует положительная линейная форма $\bar{f}$ на E (относительно структуры порядка, определяемой конусом P), служащая продолжением для f.*

Очевидно, можно ограничиться тем случаем, когда $f \neq 0$. Уравнение $f(x) = 0$ определяет в M замкнутую гиперплоскость N; в силу предложения 5, N не содержит ни одной внутренней точки конуса $P \cap M$, значит тем более ни одной точки конуса P, внутренней по отношению к E. Теорема 1 показывает, что существует замкнутая гиперплоскость H, содержащая N и не пересекающаяся с внутренностью $\mathring{P}$ конуса P; так как $x_0 \in M$, то M не может содержаться в H и, значит, $M \cap H = N$. Если $\bar{f}(x) = 0$ — уравнение гиперплоскости H и f_1 — сужение f на M, то $f_1(x) = 0$ есть уравнение гиперплоскости N в M и, следовательно, существует скаляр $\alpha \neq 0$ такой,

что $\alpha f = f_1$; умножив, если нужно, $\bar{f}$ на $\frac{1}{\alpha}$, мы можем поэтому считать, что f есть сужение $\bar{f}$ на M. Так как теперь $f(x_0) > 0$, то $\bar{f}(x_0) > 0$ и, следовательно, $\bar{f}(x) > 0$ для каждого $x \in \overset{\circ}{P}$; отсюда вытекает, что $\bar{f}(x) \geqslant 0$ на всем P, чем и доказано, что $\bar{f}$ есть положительная линейная форма.

Замечание. Утверждение предложения 6 необязательно сохраняет силу, если не предполагать, что M содержит внутреннюю точку конуса P, даже если E конечномерно и $P \cap M$ содержит внутренние точки относительно M (упражнение 13).

Упражнения. *1) Пусть E — векторное пространство над R. Заостренный выпуклый конус C в E (с вершиной 0) называется *максимальным*, если он является максимальным элементом в множестве всех выпуклых конусов $\neq E$, упорядоченном по включению. Для того чтобы выпуклый конус C был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы он был полупространством вида $f(x) \geqslant 0$, где f — ненулевая линейная форма на E. Для установления этого результата доказать последовательно следующие свойства максимального конуса C:

а) $C \cup (-C) = E$. [Рассуждением от противного].

б) Если z — не окруженная точка из C (§ 2, упражнение 3), то $-z \in C$. [Тем же методом.] Вывести отсюда, что C содержит окруженные точки.

в) Наибольшее векторное подпространство $H = C \cap (-C)$, содержащееся в C, есть гиперплоскость. [Переходом к факторпространству $F = E/H$ свести к доказательству того, что если все точки максимального конуса в F — окруженные, то F одномерно; для этого использовать б).]

*2) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, M — его векторное подпространство, N — гиперплоскость в M, A — выпуклое множество в E такое, что все точки из $A \cap M$ находятся по одну сторону от N, и обладающее, кроме того, следующим свойством: для каждого $y \neq 0$ из E существует $x \in A \cap M$ такое, что $x + \lambda y \in A$ для всех достаточно малых $|\lambda|$. Показать, что тогда в E существует гиперплоскость H такая, что все точки из A находятся по одну сторону от H и $H \cap M = N$. [Свести к случаю $N = \{0\}$; для точки $a \neq 0$, принадлежащей $A \cap M$, рассмотреть множество $\mathfrak{R}$ всех заостренных выпуклых конусов, содержащих A и не содержащих $-a$; показать, что в $\mathfrak{R}$ имеется максимальный элемент C и что C есть максимальный конус (упражнение 1).] Получить отсюда новое доказательство теоремы Хана — Банаха.

3) Пусть A — выпуклое множество в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ и x_0 — точка из E. Для существования замкнутой гиперплоскости H, содержащей x_0 и такой, что все точки из A

находятся по одну сторону от H, необходимо и достаточно, чтобы существовал выпуклый затупленный конус C с вершиной x_0, обладающий по крайней мере одной внутренней точкой и не пересекающийся с A*).

4) Пусть A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ и x_0 — точка из $\mathbf{R}^n$, не принадлежащая A. Будем через d обозначать евклидово расстояние в $\mathbf{R}^n$.

а) Показать, не используя теоремы 1, что существует, и притом только одна, точка $x \in A$ такая, что $d(x_0, x) = d(x_0, A)$, и что гиперплоскость, проведенная через x перпендикулярно к прямой, соединяющей x_0 и x, служит опорной гиперплоскостью к A.

б) Получить из а) новое доказательство теоремы 1 для того случая, когда пространство E конечномерно. [Свести к случаю, когда M есть граничная точка x_0 множества A; принять во внимание, что нижняя грань расстояний от x_0 до опорных гиперплоскостей к $\overline{A}$ равна нулю, и воспользоваться компактностью сферы $\mathbf{S}_{n-1}$.]

5) Пусть C — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^3$, определенный неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z^2 \leqslant xy$. Показать, что прямая D, заданная уравнениями $x = 0$, $z = 1$, не пересекается с C, но не существует никакой плоскости, проходящей через D, которая бы не пересекалась с C.

6) Пусть A — полное выпуклое множество в отделимом локально выпуклом пространстве E и B — предкомпактное замкнутое выпуклое множество такое, что $A \cap B = \varnothing$. Показать, что существует замкнутая гиперплоскость, отделяющая A и B. [Перейти к пополнению $\hat{E}$.] Рассмотреть тот случай, кагда A конечномерно.

7) Пусть D — прямая в нормированном пространстве $E = L^1(\mathbf{N})$ суммируемых последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, определяемая уравнениями $\xi_n = 0$ $(n \geqslant 1)$. Показать, что существуют две возрастающие последовательности (α_n), (β_n) вещественных чисел $\geqslant 0$ такие, что выпуклое множество A, определенное неравенствами $\xi_0 \geqslant |\alpha_n \xi_n - \beta_n|$, замкнуто, неограниченно и не пересекает прямую D и что не существует никакой замкнутой гиперплоскости, которая бы отделяла A и D. [Выбрать α_n и β_n так, чтобы $A - D$ было всюду плотно.]

8) Показать, что всякие два замкнутых выпуклых множества A, B без общих точек в пространстве $\mathbf{R}^n$ отделяются замкнутой гиперплоскостью. [Пусть K_m, для каждого целого $m > 0$, — пересечение множества B с замкнутым шаром с центром 0 и радиусом m и пусть H_m — замкнутая гиперплоскость, отделяющая A и K_m; перейти к пределу и воспользоваться компактностью сферы $\mathbf{S}_{n-1}$.]

---

*) Пример выпуклого множества $A \neq E$ (в бесконечномерном векторном пространстве E), не содержащегося ни в каком полупространстве, см. в § 1, упражнение 4.

9) Пусть E — локально выпуклое пространство и C — непустой замкнутый выпуклый конус в E с вершиной 0, отличный от E. Показать, что для любой гиперплоскости H такой, что все точки конуса C находятся от нее по одну сторону, существует параллельная ей опорная гиперплоскость к C. Вывести отсюда, что для любой точки $a \notin C$ существует замкнутая опорная гиперплоскость к C, не содержащая a и отделяющая a и C.

*10) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и C — замкнутый выпуклый конус в E с вершиной 0.

а) Пусть M — *конечномерное* векторное подпространство в E такое, что $C \cap M = \{0\}$. Показать, что $C + M$ замкнуто в E. [Рассуждать от противного: если бы $b \notin M + C$ было точкой прикосновения для $M + C$, то для любой симметричной выпуклой окрестности нуля U в E пересечение $b + M$ с $\overline{C + U} \subset C + 2U$ было бы не пусто; воспользоваться далее тем, что в подпространстве $N = M + \mathbf{R}b$ сфера компактна.]

б) Вывести из а), что при тех же предположениях C обладает замкнутой опорной гиперплоскостью, содержащей M. [Использовать упражнение 9.]

в) Пусть C — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^3$, определенный в упражнении 5, и M — прямая, заданная уравнениями $x = 0$, $z = 0$. Показать, что $C + M$ незамкнуто в $\mathbf{R}^3$.

11) Пусть A — компактное множество в $\mathbf{R}^n$, обладающее внутренними точками. Показать, что если через каждую граничную точку множества A проходит по крайней мере одна опорная гиперплоскость, то A выпукло. [Рассуждая от противного, показать, что если x и y — две точки множества A такие, что соединяющий их отрезок не содержится в A, и z — внутренняя точка множества A, не лежащая на этом отрезке, то треугольник с вершинами x, y, z содержит граничную точку множества A, отличную от x и y.]

*12) Пусть A — замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, обладающее следующим свойством: для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$ существует, и притом только одна, точка $y \in A$ такая, что $d(x, y) = d(x, A)$ (где d — евклидово расстояние) (см. упражнение 4).

а) Показать, что при $x \notin A$ гиперплоскость H, проходящая через y перпендикулярно к отрезку, соединяющему x и y, служит опорной гиперплоскостью к A. [Доказать невозможность существования в A точек, расположенных вместе с x строго по одну сторону от H, рассмотрев для этого проходящие через y сферы с центрами на полупрямой с началом y, проходящей через x.]

б) Вывести из а), что A — выпуклое множество. [Рассуждая от противного, рассмотреть две точки x, y множества A и точку $z \notin A$ соединяющего их отрезка.]

13) Пусть P — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^3$ с вершиной 0, порожденный выпуклым множеством, заданным соотношениями $x = 1$,

$z \geqslant (y^3)^-$ [$\equiv \max(-y^3, 0)$], так что $P \cap (-P) = \{0\}$. Пусть M — подпространство $z = 0$ в $\mathbf{R}^3$. Показать, что на M линейная форма $f(x, y) = y$ положительна относительно структуры порядка, определяемой конусом $P \cap M$, но нет ни одной линейной формы $\overline{f}$ на $\mathbf{R}^3$, положительной относительно структуры порядка, определяемой конусом P, которая служила бы продолжением для f.

14) Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\mathscr{T}$ — сильнейшая из локально выпуклых топологий в E, мажорируемых его топологией $\mathscr{T}_0$. Непрерывные линейные отражения пространства E в локально выпуклое пространство F — одни и те же в обеих топологиях $\mathscr{T}_0$ и $\mathscr{T}$. Для того чтобы на E существовала ненулевая непрерывная линейная форма, необходимо и достаточно, чтобы для $\mathscr{T}_0$ существовала окрестность нуля с не всюду плотной (в топологии $\mathscr{T}_0$) выпуклой оболочкой.

*15) Пусть E — бесконечномерное метризуемое локально выпуклое пространство.

а) Показать, что в E существуют последовательность точек (a_n), стремящаяся к нулю, и убывающая последовательность замкнутых векторных подпространств (L_n) такие, что каждое L_n имеет в E факторразмерность n и a_n, для каждого n, принадлежит L_n, но не принадлежит L_{n+1}.

б) Пусть E, кроме того, *полно*. Показать, что последовательности (a_n) и (L_n), удовлетворяющие условиям, указанным в а), можно определить так, чтобы, сверх того, для каждой ограниченной последовательности вещественных чисел (λ_n) ряд с общим членом $\lambda_n a_n$ был коммутативно сходящимся в E и линейное отображение $(\lambda_n) \to \sum_n \lambda_n a_n$ банаховского пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ в E было непрерывным и взаимно однозначным.

в) Вывести из б), что если E — бесконечномерное пространство Фреше, то мощность каждого его базиса над $\mathbf{R}$ не меньше мощности континуума (см. гл. I, § 1, упражнение 9). Если в E существует счетное всюду плотное множество, то каждый базис в E имеет мощность континуума.

16) Пусть E — бесконечномерное пространство Фреше, в котором существует счетное всюду плотное множество (см. гл. I, § 2, упражнение 8б).

а) Показать, что в E существует последовательность (a_n) линейно независимых элементов такая, что каждая из последовательностей (a_{2n}) и (a_{2n+1}) тотальна в E. [Использовать упражнение 15в.]

б) Пусть F — векторное подпространство в E, порожденное элементами a_{2n+1} ($n \in \mathbf{N}$), и M_n для каждого $n > 0$ — подпространство, порожденное элементами a_{2k} с индексами $k \leqslant n$. Пусть, далее, φ_n для каждого n — сужение на F канонического отображения E на E/M_n и $\mathscr{T}_n$ — прообраз топологии пространства E/M_n относительно отображения φ_n. Показать, что каждое $\mathscr{T}_n$ является отделимой локально

выпуклой топологией в F, но их нижней гранью в множестве всех локально выпуклых топологий в F служит слабейшая топология.

17) Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n непустых выпуклых открытых множеств в топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$, имеющих пустое пересечение. Показать, что в E существует замкнутое линейное многообразие V факторразмерности $n-1$, не пересекающее ни одного из этих множеств. [Провести доказательство индукцией по n.]

§ 4. Компактные множества в топологических векторных пространствах

1. Выпуклые оболочки компактных множеств

Предложение 1. *Выпуклая оболочка объединения конечного числа компактных выпуклых множеств A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в отделимом топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ компактна.*

Действительно, пусть B — компактное множество в $\mathbf{R}^n$, определенное соотношениями $\lambda_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Рассмотрим непрерывное отображение множества $B \times \prod_{i=1}^{n} A_i \subset \mathbf{R}^n \times E^n$ в E, определяемое формулой

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Выпуклая оболочка C объединения $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ есть образ множества $B \times \prod_{i=1}^{n} A_i$ при этом отображении, и так как $B \times \prod_{i=1}^{n} A_i$ компактно, то компактно и C.

Предложение 2. *Уравновешенная выпуклая оболочка предкомпактного множества в отделимом локально выпуклом пространстве E предкомпактна.*

Действительно, пусть A — предкомпактное множество в E. Его уравновешенная выпуклая оболочка есть выпуклая оболочка его уравновешенной оболочки (гл. I, § 1, n° 3), а мы знаем, что эта последняя предкомпактна (гл. I, § 1, n° 5). Таким образом, остается доказать, что выпуклая оболочка предкомпактного множества A предкомпактна. Для каждой выпуклой окрестности нуля V в E существует конечное число точек $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что A содер-

жится в объединении окрестностей $a_i + V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Следовательно, выпуклая оболочка B множества A содержится в выпуклой оболочке этого объединения, т. е. в $C + V$, где C — выпуклая оболочка конечного множества, образованного n точками a_i (§ 1, предложение 8). Но C компактно (предложение 1); поэтому существует конечное число точек $b_k \in C$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$, таких, что C содержится в объединении окрестностей $b_k + V$. А тогда B содержится в объединении окрестностей $b_k + 2V$, и предложение доказано.

Отметим, что в бесконечномерном отделимом локально выпуклом пространстве выпуклая оболочка компактного множества необязательно замкнута (упражнение 3б).

Следствие. *В полном отделимом локально выпуклом пространстве замкнутая выпуклая оболочка компактного множества компактна.*

Напротив, в неполном пространстве замкнутая выпуклая оболочка компактного множества может быть не компактной (упражнение 3в).

2. Экстремальные точки компактных выпуклых множеств

Определение 1. *Пусть A — выпуклое множество в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$. Говорят, что точка $x \in A$ есть экстремальная точка множества A, если в A нет никакого открытого отрезка, содержащего x.*

Иными словами, из соотношений $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$, $y \in A$, $z \in A$. $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ следует $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ (так что $x = z$ или $x = y$). Отсюда вытекает, что x не может быть центром тяжести никакого множества точек из A, снабженных неотрицательными массами, не будучи само одной из этих точек. Действительно, если $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и если бы, например, мы имели $\lambda_h > 0$ и $\lambda_k > 0$ (так что $\lambda_h \neq 1$), то можно было бы написать $x = \lambda_h x_h + (1 - \lambda_h) y_h$, где y_h — центр тяжести точек x_i с индексами $i \neq h$, снабженных массами $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_h}$; и так как $y_h \in A$, то мы пришли бы к противоречию.

Примеры. 1) В пространстве $\mathbf{R}^n$ каждая точка сферы $\mathbf{S}_{n-1}$ есть экстремальная точка замкнутого шара $\mathbf{B}_n$. Действительно, если

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leqslant 1$ и $0 < \lambda < 1$, то равенство

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = 1 = [\lambda + (1-\lambda)]^2$$

возможно лишь если $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = 1$. Но последние равенства означают, что $\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 = 0$, откуда $y_i = z_i$ для каждого индекса i, и утверждение доказано.

2) В нормированном пространстве $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ ограниченных последовательностей вещественных чисел экстремальные точки шара $\|x\| \leqslant 1$ это точки $x = (\xi_n)$, в которых $|\xi_n| = 1$ для каждого n. Действительно, предположим, что $|\xi_n| \leqslant 1$ для всех n и $|\xi_p| < 1$ для какого-то номера p. Тогда можно написать

$$x = \frac{1+\xi_p}{2}\, y + \frac{1-\xi_p}{2}\, z,$$

где y (соотв. z) — точка с теми же координатами, что и x, за исключением p-той координаты, равной $+1$ (соотв. -1). Это показывает, что x — не экстремальная точка, поскольку $\|y\| \leqslant 1$ и $\|z\| \leqslant 1$. Напротив, если $|\xi_n| = 1$ для всех n, то x — экстремальная точка, ибо из соотношений $\xi_n = \lambda\eta_n + (1-\lambda)\zeta_n$, $|\eta_n| \leqslant 1$, $|\zeta_n| \leqslant 1$ и $0 < \lambda < 1$ следует, что $\xi_n = \eta_n = \zeta_n$.

Замечание. Пусть C — выпуклый конус в E с вершиной 0. Ясно, что C не может иметь ни одной экстремальной точки, кроме вершины (а последняя будет экстремальной, лишь если C — выступающий заостренный конус). Мы говорим, что полупрямая D с началом 0, содержащаяся в конусе C, есть его *экстремальная образующая*, если каждый открытый отрезок, содержащийся в C и имеющий общую точку с D, содержится в D. Пусть H — гиперплоскость, не проходящая через 0 и пересекающая полупрямую $D \subset C$ с началом 0 в некоторой точке x_0. Для того чтобы D была экстремальной образующей конуса C, *необходимо и достаточно, чтобы x_0 была экстремальной точкой множества $H \cap C$*. Действительно, необходимость этого условия очевидна. Обратно, пусть оно выполнено и предположим, что существует прямая $D' \neq D$, проходящая через x_0 и такая, что $D' \cap C$ содержит открытый отрезок, содержащий x_0. Пусть y — ненулевой вектор, параллельный D'; из наших предположений следует, что точка $(1+\lambda)x_0 + \mu y$ при достаточно малых $|\lambda|$ и $|\mu|$ будет принадлежать C. Но тогда в плоскости P полупрямых D и D', наделенной ее единственной отделимой локально выпуклой топологией, x_0 будет внутренней точкой множества $P \cap C$ и, следовательно, прямая $P \cap H$ будет содержать

открытый отрезок, содержащийся в $H \cap C$ и содержащий x_0, что, однако, противоречит предположению.

Пусть C — выступающий заостренный выпуклый конус. Рассмотрим структуру порядка в E, для которой C образует множество всех элементов $\geqslant 0$ (§ 1, предложение 13). Для того чтобы элемент $x > 0$ из E принадлежал экстремальной образующей конуса C, *необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент* $\geqslant 0$, *мажорируемый этим элементом* x, *был пропорционален* x. Действительно, пусть элемент $y \geqslant 0$, не пропорциональный x, мажорируется элементом x. Тогда $x - y > 0$, следовательно, $x + \lambda y \in C$ для всех $\lambda \geqslant -1$, так что в C содержится открытый отрезок, содержащий x и не принадлежащий полупрямой D с началом 0, проходящей через x; тем самым D не экстремальна. Обратно, если D не экстремальна, то существует замкнутый отрезок с концами y, z, принадлежащими C, не содержащийся в D и такой, что $x = \lambda y + (1-\lambda) z$, где $0 < \lambda < 1$. Так как тогда $\lambda y \geqslant 0$ и $(1-\lambda) z \geqslant 0$, то элементом x мажорируется элемент λy, не пропорциональный x.

Мы видели (§ 3, предложения 2 и 4), что в отделимом локально выпуклом пространстве каждое компактное выпуклое множество обладает замкнутой опорной гиперплоскостью. Но более того:

Предложение 3. *Пусть* A — *компактное выпуклое множество в отделимом локально выпуклом пространстве* E. *Каждая замкнутая опорная гиперплоскость* H *множества* A *содержит по крайней мере одну его экстремальную точку.*

Будем говорить, что линейное многообразие M в E есть *опорное многообразие* множества A, если оно имеет общую точку с A и обладает следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in A \cap M$, каждый открытый отрезок, содержащийся в A и содержащий x, необходимо содержится в M. Непосредственно ясно, что каждая опорная гиперплоскость множества A есть опорное многообразие (чем и объясняется принятая нами терминология). Сказать, что линейное многообразие, сводящееся к точке x_0 множества A, есть опорное многообразие этого множества, все равно что сказать, что x_0 есть *экстремальная точка* множества A. Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — множество всех *замкнутых* опорных многообразий множества A, содержащихся в H; $\mathfrak{F}$ не пусто, поскольку $H \in \mathfrak{F}$. Упорядочим $\mathfrak{F}$ по включению $\supset$; покажем, что $\mathfrak{F}$ *индуктивно* по этому отношению порядка (Теор. мн., Рез., § 6, n° 9). Действительно, пусть $\mathfrak{G}$ — совершенно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{F}$; все сводится к доказа-

тельству того, что $N = \bigcap_{M \in \mathfrak{G}} M$ будет опорным многообразием множества A (ибо замкнутость N очевидна). А для этого нужно только проверить, что $N \cap A = \bigcap_{M \in \mathfrak{G}} (M \cap A)$ не пусто. Но когда M пробегает $\mathfrak{G}$, пересечения конечных наборов множеств вида $M \cap A$ суть тоже множества этого вида, поскольку $\mathfrak{G}$ совершенно упорядочено. Таким образом (поскольку $M \cap A$, по предположению, не пусто ни для какого $M \in \mathfrak{G}$), эти замкнутые множества образуют базис фильтра в *компактном* пространстве A, что и доказывает, что $N \cap A$ не пусто.

Поэтому, в силу теоремы Цорна (Теор. мн., Рез., § 6, n° 10), в $\mathfrak{F}$ существует *минимальный* элемент N_0. Мы покажем, что N_0 сводится к точке, чем предложение и будет доказано. Предположим противное. Тогда $N_0 \cap A$ будет непустым компактным множеством в замкнутом линейном многообразии N_0 размерности > 0, следовательно, $N_0 \cap A$ будет обладать замкнутой опорной гиперплоскостью L *в* N_0 (§ 3, предложения 2 и 4). Но L — опорное многообразие множества A. Действительно, если $x \in L \cap A$ и S — открытый отрезок, содержащий x и содержащийся в A, то S содержится в N_0, поскольку $x \in N_0$, а N_0 — опорное многообразие множества A; таким образом, $S \subset N_0 \cap A$, и так как L — опорная гиперплоскость множества $N_0 \cap A$ в N_0, то $S \subset L$, чем наше утверждение доказано. Но тогда, очевидно, $L \in \mathfrak{F}$, $L \subset N_0$ и $L \neq N_0$, в противоречие с минимальностью N_0, и предложение доказано.

Теорема 1 (Крейн — Мильман). *Каждое компактное выпуклое множество в отделимом локально выпуклом пространстве E есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих экстремальных точек.*

Действительно, пусть B — замкнутая выпуклая оболочка множества всех экстремальных точек множества A. Ясно, что $B \subset A$. Для доказательства того, что $A \subset B$, достаточно доказать, что, какова бы ни была непрерывная линейная форма f на E, $f(A) \subset f(B)$ (§ 3, следствие 4 предложения 4). Но $f(A)$ — компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}$, т. е. некоторый компактный интервал $[\alpha, \beta]$. Гиперплоскость, заданная уравнением $f(x) = \alpha$, есть замкнутая опорная гиперплоскость множества A и, следовательно (предложение 3), содержит его экстремальную точку, что, по определению, означает,

что $\alpha \in f(B)$. Так же устанавливается, что $\beta \in f(B)$, и так как $f(B)$ выпукло и, значит, является интервалом в $\mathbf{R}$, то тем самым $f(A) \subset f(B)$, и теорема доказана.

Эта теорема допускает следующее уточнение.

Предложение 4. *Пусть K — компактное множество в отделимом локально выпуклом пространстве E, обладающее компактной замкнутой выпуклой оболочкой A. Тогда каждая экстремальная точка множества A принадлежит K.*

Пусть x — экстремальная точка множества A. Для каждой замкнутой симметричной выпуклой окрестности нуля V в E существует конечное число точек $a_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что множества $a_i + V$ покрывают K. Пусть A_i — замкнутая выпуклая оболочка множества $K \cap (a_i + V)$. Так как $A_i \subset A$, то A_i компактно. Отсюда вытекает, что A есть выпуклая оболочка n множеств A_i, поскольку последняя компактна (предложение 1), содержится в A и, очевидно, содержит K. Поэтому $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $x_i \in A_i$, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Так как x — экстремальная точка множества A, а все x_i принадлежат A, то это означает, что $x = x_i$ для некоторого i. Иначе говоря, $x \in A_i$ для некоторого i; но так как V выпукло и замкнуто, то $A_i \subset a_i + V$; следовательно, $x \in K + V$. Будучи замкнутым, K является пересечением множеств $K + V$, когда V пробегает множество всех симметричных окрестностей нуля. Тем самым $x \in K$.

Замечания. 1) Даже в конечномерном пространстве E множество всех экстремальных точек компактного выпуклого множества необязательно замкнуто (упражнение 8).

2) В бесконечномерном отделимом локально выпуклом пространстве компактное выпуклое множество может обладать экстремальными точками, через которые не проходит никакая его опорная гиперплоскость (гл. IV, § 5, упражнение 3б).

3) Компактное множество K в неполном отделимом локально выпуклом пространстве, имеющее некомпактную замкнутую выпуклую оболочку, может обладать экстремальными точками, не принадлежащими K (упражнение 3в).

4) Может случиться, что замкнутый шар с центром 0 и радиусом 1 в бесконечномерном банаховском пространстве не обладает ни одной экстремальной точкой.

Упражнения. 1) Дать пример замкнутого некомпактного множества в $\mathbf{R}^2$, выпуклая оболочка которого незамкнута.

2) Показать, что выпуклая оболочка компактного множества в пространстве $\mathbf{R}^n$ компактна (см. § 1, упражнение 8).

*3) Пусть I — нитервал $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$ и F — векторное пространство $\mathcal{C}(I)$ непрерывных числовых функций на I. Пусть E — пространство $\mathbf{R}^F$ (составленное из всех конечных числовых функций, определенных на F) и ε_a для каждого $a \in I$ — элемент из E такой, что $\varepsilon_a(f) = f(a)$ для всех $f \in F$.

а) Показать, что множество K всех ε_x $(x \in I)$ компактно в E.

б) Пусть μ — элемент из E такой, что $\mu(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ для всех $f \in F$ („мера Лебега"). Показать, что μ есть точка прикосновения выпуклой оболочки множества K в E, но не принадлежит этой оболочке (см. Функц. вещ. перем., гл. II, § 1, предложение 5).

в) Пусть G — векторное подпространство пространства E, порожденное множеством K и элементом μ. Показать, что μ есть экстремальная точка замкнутой выпуклой оболочки множества K в G (см. предложение 4).

*4) Пусть A — выпуклое множество в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ и $x \in A$. Назовем *гранью* точки x в A множество, образованное точкой x и теми точками $y \neq x$ из A, для которых прямая, проходящая через x и y, содержит открытый отрезок, содержащийся в A и содержащий x. Окруженные (§ 2, упражнение 3) (соотв. экстремальные) точки множества A — это точки, грань которых относительно A совпадает с A (соотв. сводится к самой только этой точке).

а) Показать, что грань F_x точки $x \in A$ есть наибольшее выпуклое множество, содержащееся в A и имеющее x своей окруженной точкой.

б) Какова бы ни была точка y грани F_x точки x множества A, ее грань F_y в A совпадает с гранью в F_x. Для того чтобы $F_y = F_x$, необходимо и достаточно, чтобы y было окруженной точкой множества F_x. Вывести отсюда, что если F_x конечномерна и y — ее не окруженная точка, то размерность F_y меньше размерности F_x.

в) Показать, что линейное многообразие M, порожденное гранью F_x произвольной точки $x \in A$ в A, есть пересечение опорных многообразий множества A, проходящих через x, и что $M \cap A = F_x$. Каково бы ни было опорное многообразие N множества A, $N \cap A$ является гранью (в A) каждой своей окруженной точки.

г) Пусть A и B — два выпуклых множества в E. Какова бы ни была точка $x \in A \cap B$, грань x в $A \cap B$ есть пересечение граней x в A и B. Показать, что если E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и B — замкнутое выпуклое множество в E, содержащее замкнутое линейное многообразие M конечной факторразмерности n, то каждая грань точки из B (в B) содержит замкнутое линейное многообразие факторразмерности n (см. § 1, упражнение 11). Вывести отсюда,

что при этих условиях, для того чтобы грань точки $x \in A \cap B$ в $A \cap B$ была конечномерна, необходимо и достаточно, чтобы была конечномерна грань x в A; при этом, если тогда p и q — размерности граней x в A и в $A \cap B$, то $p \leqslant q + n$.

5) Пусть A — выпуклое множество в плоскости $\mathbf{R}^2$, определяемое неравенствами $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 - \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{1-x^2}$. Показать что существуют граничные точки множества A, грани которых в A отличны от пересечения множества A с его опорными прямыми, проходящими через эти точки.

6) Пусть A — замкнутое выпуклое множество в нормированном пространстве $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ ограниченных последовательностей $x = (\xi_n)$ вещественных чисел, определяемое неравенствами $-\frac{1}{n} \leqslant \xi_n \leqslant 1$ для $n \geqslant 1$ и $-1 \leqslant \xi_0 \leqslant 1$. Показать, что A — выпуклое тело, 0 — его граничная точка и ее грань в A незамкнута. Показать, что A компактно в топологии, индуцированной из пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, но грань точки 0 в A незамкнута в этой топологии.

7) Показать, что множество всех экстремальных точек замкнутого выпуклого множества A в пространстве $\mathbf{R}^2$ замкнуто. [Показать, что точки множества A, грань которых в A одномерна, образуют на границе этого множества открытое множество.]

8) Пусть A — компактное выпуклое множество в пространстве $\mathbf{R}^3$ служащее выпуклой оболочкой объединения круга $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ и пары точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$. Показать, что множество экстремальных точек множества A незамкнуто.

9) Показать, что всякое замкнутое выпуклое множество A в $\mathbf{R}^n$, не содержащее никакой полупрямой, есть выпуклая оболочка множества своих экстремальных точек. [Индукцией по размерности грани точки множества A.]

10) Пусть e_n в банаховском пространстве $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ — последовательность, член которой с номером n равен 1, а все остальные члены равны 0. Пусть A — замкнутая выпуклая оболочка множества, образованного точками 0 и $\frac{e_n}{n+1}$ $(n \geqslant 0)$. Показать, что A компактно, но не совпадает с выпуклой оболочкой своих экстремальных точек.

11) Пусть E — замкнутое векторное подпространство банаховского пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$, образованное последовательностями $x = (\xi_n)$, для которых $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = 0$.

а) Показать, что замкнутый шар $\|x\| \leqslant 1$ в банаховском пространстве E не обладает ни одной экстремальной точкой.

б) Пусть u — непрерывная линейная форма $(\xi_n) \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\xi_n$ на E. Показать, что шар $\|x\| \leqslant 1$ не обладает ни одной опорной гиперплоскостью, параллельной замкнутой гиперплоскости, заданной уравнением $u(x) = 0$.

12) Пусть A — компактное множество в нормированном пространстве E.

а) Показать, что расстояние между двумя параллельными опорными гиперплоскостями множества A не превосходит диаметра δ этого множества.

б) Показать, что в A существуют пары точек (a, b) такие, что $\|a-b\| = \delta$; для такой пары точек существует пара параллельных опорных гиперплоскостей, проходящих соответственно через a и b и отстоящих друг от друга на расстояние δ. [Рассмотреть замкнутый шар с центром a и радиусом δ.]

*13) а) Пусть A — n-мерное компактное выпуклое множество в пространстве $\mathbf{R}^n$, снабженном евклидовой нормой. Для каждого вектора $x \in \mathbf{S}_{n-1}$ обозначим через $\rho(x)$ верхнюю грань длин отрезков, параллельных x и содержащихся в A. Показать, что в A существует пара точек u, v такая, что соединяющий их отрезок параллелен вектору x и имеет длину $\rho(x)$. Вывести отсюда существование двух параллельных опорных гиперплоскостей множества A, проходящих соответственно через точки u и v. [Рассмотреть множество $A + \rho(x)x$ и применить предложение 1 § 3, приняв во внимание упражнение 9 § 1.]

б) Пусть d — нижняя грань расстояний между парами параллельных опорных гиперплоскостей множества A. Показать, что на его границе существуют точки a и b такие, что $\|a-b\| = d$ и гиперплоскости, проходящие соответственно через a и b перпендикулярно к соединяющему их отрезку, являются опорными гиперплоскостями множества A. [Использовать а).]

14) Пусть A — компактное выпуклое множество в пространстве $\mathscr{B}(\mathbf{N})$, определенное в упражнении 10, и E — порожденное им замкнутое векторное подпространство пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$. Показать, что нижняя грань расстояний между парами параллельных замкнутых опорных гиперплоскостей множества A в пространстве E равна нулю, но A не содержится ни в какой замкнутой гиперплоскости этого пространства.

*15) Говорят, что точка x выпуклого множества A в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ есть точка *строгой выпуклости* множества A, если существует опорная гиперплоскость H множества A такая, что $H \cap A = \{x\}$. Каждая точка строгой выпуклости экстремальна, но не обратно (см. упражнение 5 и гл. IV, § 1, упражнение 2).

Далее предполагается, что $E = \mathbf{R}^n$ и A — компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$.

а) Пусть H — гиперплоскость в E. Показать, что в каждом определяемом ею открытом полупространстве, содержащем по крайней мере одну точку из A, имеется точка строгой выпуклости множества A. [Рассмотреть в H замкнутый $(n-1)$-мерный евклидов шар C достаточно большого радиуса, содержащий $H \cap A$, и затем n-мерные евклидовы шары B большего радиуса, содержащие A и такие, что $B \cap H = C$.]

б) Показать, что A есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих точек строгой выпуклости. [Использовать а).]

в) Показать, что каждая экстремальная точка множества A есть точка прикосновения множества всех точек строгой выпуклости этого множества. [Используя б), а также упражнение 8а § 1, принять во внимание, что экстремальная точка есть предел последовательности точек вида $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{im} x_{im}$, где $\lambda_{im} \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_{im} = 1$ и x_{im} — точки строгой выпуклости; заметить, кроме того, что каждую из последовательностей (x_{im}) и (λ_{im}) можно считать сходящейся.]

16) Пусть A — компактное выпуклое миожество в отделимом локально выпуклом пространстве E.

а) Показать, что если $0 \notin A$, то заостренный выпуклый коиус C с вершиной 0, порожденный множеством A, замкнут. Показать на примере (с $E = \mathbf{R}^2$), что это заключение уже не сохраняет силу, если $0 \in A$.

б) Показать, что C есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих экстремальных образующих. [Рассмотреть пересечение конуса C с замкнутой гиперплоскостью, строго отделяющей 0 и A, и показать что оно компактно.]

в) Пусть D — экстремальная образующая конуса C; показать, что $D \cap A$ есть замкпутый отрезок, имеющий своими концами экстремальные точки множества A.

17) Пусть E и F — два отделимых локально выпуклых пространства, A — выпуклое множество в E и u — линейное отображение E в F.

а) Прообраз опорного многообразия множества $u(A)$ относительно отображения u есть опорное многообразне множества A.

б) Если A компактно, а u непрерывно, то каждая экстремальная точка множества $u(A)$ есть образ экстремальной точки множества A при отображенин u.

в) Если A — конус, порожденный компактным выпуклым множеством, не содержащим 0 (упражнение 16), а u непрерывно, то каждая экстремальная образующая конуса $u(A)$ есть образ экстремальиой образующей конуса A при отображении u.

*18) Пусть A — произвольное множество в отделимом локальио выпуклом пространстве E.

а) Обозначим через $\Gamma_0(A)$ множество всех точек $x \in E$, обладающих тем свойством, что каково бы ни было непрерывиое линейное отображение u пространства E в *конечномерное* векторное пространство, $u(x)$ принадлежит выпуклой оболочке множества $u(A)$. Показать, что $\Gamma_0(A)$ есть выпуклое множество, содержащее A, что $\Gamma_0(\Gamma_0(A)) = \Gamma_0(A)$ и что $\Gamma_0(A)$ содержится в замкиутой выпуклой оболочке миожества A. [Использовать предложение 4 § 3.]

б) Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство элементов из A и $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство веществеиных чисел $\geqslant 0$ такое, что $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota = 1$ и $(\lambda_\iota x_\iota)$ — сум-

мируемое семейство в E. Показать, что сумма s этого семейства принадлежит $\Gamma_0(A)$. [Опираясь иа а), свести к тому случаю, когда E конечномерио и совпадает с линейным многообразием, порождеиным элементами $\lambda_\iota x_\iota$; рассуждать далее от противиого, рассматривая для каждого конечного множества J иидексов из I замкиутую гиперплоскость H_J, проходящую через x и ие пересекающуюся с выпуклой оболочкой точек x_ι с индексами $\iota \in J$, и используя затем компактиость единичной сферы в конечномерном пространстве.]

в) Показать, что если A компактно, то $\Gamma_0(A)$ совпадает с его замкнутой выпуклой оболочкой. [Использовать упражиеиие 2.]

г) Показать, что если A — множество всех экстремальных точек компактного выпуклого множества $K \subset E$, то $K = \Gamma_0(A)$. [Использовать упражнения 9 и 17.]

д) Пусть A, в обозначениях упражнения 3, — множество, образованное элементами ε_x, где x пробегает все рациональные числа отрезка $[0, 1]$. Показать, что $\Gamma_0(A)$ отлично как от выпуклой оболочки множества A, так и от его замкнутой выпуклой оболочки.

*19) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, S — замкнутое выпуклое множество в E, A — подмножество в S такое, что (в обозначениях упражнения 18) $S = \Gamma_0(A)$, и S_0 — выпуклая оболочка множества A (так что $S = \overline{S_0}$). Пусть, далее, N — замкиутое выпуклое множество в E, содержащее замкнутое лиисйное многообразие конечной факторразмерности, $M = S \cap N$ и $M_0 = S_0 \cap N$.

а) Показать, что $M = \overline{M_0}$. [Используя упражнение 18а, прииять во внимание, что каждое замкнутое линейное многообразие конечной факторразмерности в E, проходящее через точку $x \in M$, пересекается с M_0, и воспользоваться предложением 4 § 3.]

б) Предположим, что каково бы ни было конечное подмножество F множества A, пересечение грани (в S) любой точки выпуклой оболочки множества F с N компактио или конечиомерио и не содержит никакой прямой. Показать, что тогда M есть замкнутая выпуклая оболочка множества всех своих экстремальных точек. [Опираясь на а), свести к доказательству того, что каждая точка из M_0 содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества всех экстремальиых точек множества M. Использовать упражнение 4г, теорему Крейиа и Мильмана и упражнение 9.] Вывести отсюда, что каждая замкнутая опорная гиперплоскость множества M содержит его экстремальную точку.

§ 5. Полунормы

1. *Определение выпуклой функции*

Пусть H — подмножество множества E, f — конечная числовая функция, определенная на H, и G — ее *график* в произведении $E \times \mathbf{R}$, образованный точками $M_x = (x, f(x))$, где x пробегает H. Обобщая

определения, данные для функций вещественного переменного (Функц. вещ. перем., гл. I, § 4), мы будем говорить, что точка $(a, b) \in E \times \mathbf{R}$ находится *над* (соотв. *строго над*, *под*, *строго под*) G, если $a \in H$ и $b \geqslant f(a)$ (соотв. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$).

Определение 1. *Пусть H — выпуклое множество в аффинном пространстве E над $\mathbf{R}$. Говорят, что конечная числовая функция f, определенная на H, выпукла (соотв. строго выпукла) на H, если, каковы бы ни были точки x и x' из H, все точки открытого отрезка с концами M_x и $M_{x'}$ находятся над* (соотв. *строго над*) *графиком функции f.*

Иначе говоря, условием выпуклости (соотв. строгой выпуклости) функции f на H является выполнение неравенства

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) x') \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x') \tag{1}$$

(соотв.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) x') < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x')) \tag{2}$$

для каждой пары различных точек x и x' из H и каждого λ такого, что $0 < \lambda < 1$.

В силу определения 1, для выпуклости (соотв. строгой выпуклости) функции f на H необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была прямая $D \subset E$, *сужение* f на $H \cap D$ было выпуклой (соотв. строго выпуклой) функцией на $H \cap D$. Если $t \to at + b$, где t пробегает $\mathbf{R}$, — параметрическое представление прямой D, и I — выпуклое множество в $\mathbf{R}$, отвечающее при этом параметрическом представлении множеству $H \cap D$, то можно также сказать, что функция $t \to f(at + b)$ должна быть выпуклой (соотв. строго выпуклой) на I.

Для выпуклости функции f на выпуклом множестве $H \subset E$ необходимо и достаточно, чтобы множество точек из $E \times \mathbf{R}$, лежащих над графиком функции f, было выпукло (причем здесь можно слово „над“ заменить на „строго над“). Это вытекает из соответствующего предложения для функций вещественного переменного (Функц. вещ. перем., гл. I, § 4, n° 1).

Предложение 1. *Пусть f — выпуклая* (соотв. *строго выпуклая*) *функция на выпуклом множестве $H \subset E$. Для каждого конечного семейства $p \geqslant 2$ различных точек $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ из H и*

каждого семейства p вещественных чисел $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ таких, что $0<\lambda_i<1$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ и $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1$, *имеет место неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i) \tag{3}$$

(соотв.

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\right)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i)). \tag{4}$$

Это предложение доказывается индукцией по p, с использованием предложения 1 § 1.

Иными словами, образ центра тяжести точек x_i, снабженных массами $\lambda_i>0$, при отображении $x\to(x, f(x))$ лежит под (соотв. строго под) центром тяжести точек $(x_i, f(x_i))$, снабженных теми же массами.

Предоставляем читателю самому проверить, что предложения 2, 3 и 4 из Функц. вещ. перем., гл. I, § 4 ([12]) сохраняют силу и для выпуклых функций, определенных на выпуклом множестве в произвольном векторном пространстве над $\mathbf{R}$.

Говорят еще, что функция f, определенная на выпуклом множестве $H\subset E$ и принимающая значения из интервала $]-\infty, +\infty]$ расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$, *выпукла* (соотв. *строго выпукла*) на H, если неравенство (1) (соотв. (2)) удовлетворяется для любой пары различных точек x и x' из H и каждого λ такого, что $0<\lambda<1$. К таким функциям применимо без всякого изменения все сказаиное выше, за исключением связанного с графиками.

2. *Непрерывность выпуклых функций*

Предложение 2. *Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, H — непустое открытое выпуклое множество в E и f — (конечная) выпуклая функция, заданная на H. Для того чтобы f была непрерывна на H, необходимо и достаточно, чтобы существовало непустое открытое множество $U\subset H$, на котором f ограниченна сверху.*

Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Пусть f ограниченна сверху в некоторой окрестности V точки $x_0\in H$. Покажем прежде всего, что f непрерывна в точке x_0. Путем надле-

жащих переносов можно свести рассмотрение к тому случаю, когда $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$; кроме того, окрестность V можно предполагать уравновешенной. Пусть $f(x) \leqslant a$ для всех $x \in V$. Заметим, что если $x \in \varepsilon V$, где $0 < \varepsilon < 1$, то $\frac{x}{\varepsilon} \in V$ и $-\frac{x}{\varepsilon} \in V$. Но тогда неравенство (1), примененное к точкам 0 и $\frac{x}{\varepsilon}$ и числу $\lambda = \varepsilon$, показывает, что $f(x) \leqslant \varepsilon f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon a$, а примененное к точкам x и $-\frac{x}{\varepsilon}$ и числу $\lambda = \frac{1}{1+\varepsilon}$, — что $f(x) \geqslant -\varepsilon f\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \geqslant -\varepsilon a$. Тем самым наше утверждение доказано. Пусть теперь y — произвольная точка из H. Тогда существует число $\rho > 1$ такое, что точка $z = \rho y$ еще принадлежит H. Пусть g — гомотетия $x \to \lambda x + (1-\lambda) z$ с центром z и коэффициентом $\lambda = 1 - \frac{1}{\rho}$, переводящая 0 в y. В силу формулы (1), для любой точки $g(x) \in g(V)$ имеем $f(g(x)) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) \leqslant \lambda a + (1-\lambda) f(z)$. Первая часть доказательства показывает тогда, что f непрерывна в точке y, и предложение доказано.

Следствие 1. *Каждая (конечная) выпуклая функция f, полунепрерывная сверху на H, непрерывна на H.*

Действительно, любая точка $x_0 \in H$ обладает окрестностью, на которой f ограниченна сверху.

Следствие 2. *Каждая (конечная) выпуклая функция f, определенная на непустом открытом выпуклом множестве H в $\mathbf{R}^n$, непрерывна на H.*

Можно считать, что $0 \in H$. Пусть K — замкнутый куб с центром 0 и ребром 2α, содержащийся в H, и U — открытый куб, определяемый неравенствами $0 < \xi_i < \frac{\alpha}{n}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Каждая точка $x \in U$ принадлежит выпуклой оболочке нулевого вектора и n векторов αe_i, где e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n векторов канонического базиса в $\mathbf{R}^n$; действительно, x можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha} \cdot \alpha e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha}\right) \cdot 0,$$

а

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha} < 1.$$

Но тогда из неравенства (3) следует, что

$$f(x) \leqslant |f(0)| + \sum_{i=1}^{n} |f(\alpha e_i)|$$

для всех $x \in U$, откуда, в силу предложения 2, и вытекает непрерывность $f(x)$ на H.

На бесконечиомерием локально выпуклом пространстве вообще существуют не непрерывные линейные формы (гл. IV, § 5, упражнение 3а), а следовательно, и выпуклые функции, не непрерывные ни в какой точке.

3. Полунормы

Определение 2. *Конечную числовую функцию p, определенную на векторном пространстве E над* $\mathbf{R}$, *называют полунормой, если она удовлетворяет следующим аксиомам*:

($\mathrm{SN_I}$) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$;

($\mathrm{SN_{II}}$) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* x *и* $y \in E$.

Из этих аксиом вытекает, что $p(0) = 0$ и $p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$, поскольку $0 = p(0) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y), \tag{5}$$

непосредственно вытекающее из соотношений $p(x) \leqslant p(y) + p(x-y)$ и $p(y) \leqslant p(x) + p(y-x)$, поскольку $p(y-x) = p(x-y)$.

Полунорма есть *выпуклая* функция на E, ибо из ($\mathrm{SN_I}$) и ($\mathrm{SN_{II}}$) следует, если $0 < \lambda < 1$, что

$$p(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant p(\lambda x) + p((1-\lambda) y) = \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y).$$

Заметим, что последнее рассуждение применимо, более общим образом, ко всякой функции на E со значениями из $]-\infty, +\infty]$, которая *положительно однородна*, т. е. такова, что $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для каждого конечного $\lambda > 0$, и удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{SN_{II}}$).

Примеры. 1) *Норма* p на E есть полунорма, для которой $p(x) = 0$ влечет $x = 0$ (гл. I, § 1, п° 2).

2) Функция $x \to |f(x)|$ есть полунорма для любой линейной формы f на E.

Предложение 3. *Пусть E — топологическое векторное пространство над* $\mathbf{R}$.

1° *Каждая полунорма p, определенная на E и непрерывная в точке $x=0$, равномерно непрерывна на E; множество V тех точек $x\in E$, для которых $p(x)\leqslant 1$, есть симметричное выпуклое тело* (§ 3, определение 4), *внутренность которого образует множество тех точек $x\in E$, для которых $p(x)<1$.*

2° *Обратно, для каждого симметричного выпуклого тела A в E существует, и притом лишь одна, полунорма p на E такая, что A совпадает с множеством тех $x\in E$, для которых $p(x)\leqslant 1$; при этом p непрерывна на E.*

1° Равномерная непрерывность полунормы p вытекает из неравенства (5). Множество V замкнуто (в силу непрерывности p) и симметрично; кроме того, если x, $y\in V$ и $0<\lambda<1$, то

$$p(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)\leqslant \lambda+(1-\lambda)=1,$$

так что V выпукло. Множество W тех x, для которых $p(x)<1$, открыто и содержится в V; если же $p(y)=1$, то $\rho y\notin V$ при $\rho>1$, так что y не содержится внутри V; тем самым $W=\mathring{V}$.

Заметим, что какова бы ни была точка $x\in E$, множество тех чисел $\rho>0$, для которых $x\in\rho V$, совпадает с интервалом $[p(x), +\infty[$, поскольку отношение $x\in\rho V$ равносильно неравенству $p(x)\leqslant\rho$. Другими словами, $p(x)=\inf\limits_{\rho>0,\ x\in\rho V}\rho$ для каждого $x\in E$.

2° Последнее замечание показывает, что если существует полунорма p такая, что A совпадает с множеством тех $x\in E$, для которых $p(x)\leqslant 1$, то эта полунорма единственна и определяется формулой

$$p(x)=\inf_{\rho>0,\ x\in\rho A}\rho. \tag{6}$$

Покажем, что формула (6) действительно определяет полунорму. Прежде всего, так как A — поглощающее множество, то $p(x)$ конечно для каждого $x\in E$. Так как A симметрично, то отношения $x\in\rho A$ и $-x\in\rho A$ равносильны, откуда $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$ для каждого $\lambda\in\mathbf{R}$. С другой стороны, пусть x и y — произвольные точки из E; если α и β — положительные числа, для которых $x\in\alpha A$, $y\in\beta A$, то $x+y\in\alpha A+\beta A$, а так как A выпукло, то $\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A$; в силу формулы (6), отсюда следует, что $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. Если $p(x)\leqslant 1$, то $x\in\rho A$ для всех $\rho>1$ и, следовательно, $x\in A$, поскольку A замкнуто. Обратно, из $x\in A$ очевидным образом

следует, что $p(x) \leqslant 1$. Наконец, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, множество тех $x \in E$, для которых $p(x) \leqslant \varepsilon$, есть окрестность нуля εA, так что p непрерывно в точке 0, а значит, и на всем E.

Замечания. 1) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и A — поглощающее симметричное выпуклое множество в E. Если наделить E сильнейшей локально выпуклой топологией $\mathfrak{T}_\omega$ (§ 2, п° 1), то 0 будет в A внутренней точкой. Полунорму p, для которой $\bar{A}$ служит множеством всех $x \in E$ таких, что $p(x) \leqslant 1$, назовем *калибровочной функцией* множества A. Внутренность $\mathring{A}$ множества A в топологии $\mathfrak{T}_\omega$ будет тогда множеством тех x, для которых $p(x) < 1$, откуда сразу видно, что и здесь $p(x)$ задается формулой (6). Выпуклые множества, имеющие p своей калибровочной функцией, — это выпуклые множества, содержащие $\mathring{A}$ и содержащиеся в $\bar{A}$. Ясно, что калибровочной функцией для λA, где $\lambda > 0$, служит $\frac{1}{\lambda} p$.

Обратно, каждая полунорма p на E непрерывна в топологии $\mathfrak{T}_\omega$, поскольку множество V тех x, для которых $p(x) < 1$, в силу $(\mathrm{SN_I})$, — поглощающее; предложение 3 показывает тогда, что p служит калибровочной функцией для всех выпуклых множеств, содержащих V и содержащихся в его замыкании $\bar{V}$.

2) Пусть p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — конечный набор полунорм на E. Из определения 2 сразу следует, что $p(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$ также есть полунорма. Кроме того, множество V тех x, для которых $p(x) \leqslant 1$, есть пересечение множеств V_i тех x, для которых $p_i(x) \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

4. *Полунормы в локально выпуклых пространствах*

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, Γ — множество полунорм на E и $\mathfrak{G}$ — множество всех поглощающих симметричных выпуклых множеств в E, определяемых соотношениями вида $p(x) < \lambda$, где p пробегает Γ, а λ — множество всех чисел > 0. Тогда множество $\mathfrak{V}$ пересечений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{G}$ есть базис фильтра, образованного поглощающими симметричными выпуклыми множествами и инвариантного относительно всех гомотетий, коэффициент которых > 0. Следовательно, существует (и притом только одна) топология, согласующаяся со структурой векторного пространства в E, для которой $\mathfrak{V}$ служит фундаментальной системой окрестностей нуля (§ 2, п° 1). Мы будем

называть эту (очевидно, локально выпуклую) топологию топологией, *определяемой множеством* Γ *полунорм.*

Примеры. 1) Топология *нормированного* пространства над $\mathbf{R}$ определяется множеством, состоящим из *одной единственной нормы*. Заметим, что топология, определяемая в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ *конечным* числом норм p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, может быть задана и одной нормой $p(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$. Напротив, локально выпуклая топология, определяемая бесконечным множеством *норм*, вообще говоря, не может быть задана одной только нормой (гл. III, § 2, упражнение 2).

2) Пусть $(\mathscr{T}_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство локально выпуклых топологий в векторном пространстве E и каждая из этих топологий $\mathscr{T}_\iota$ задана множеством Γ_ι полунорм. Из предыдущего определения следует, что локально выпуклая топология, заданная множеством полунорм $\Gamma = \bigcup_{\iota \in I} \Gamma_\iota$, есть верхняя грань топологий $\mathscr{T}_\iota$.

3) Пусть $\mathscr{E}$ — векторное пространство над $\mathbf{R}$, образованное всеми бесконечно дифференцируемыми числовыми функциями на $\mathbf{R}$. Для каждой функции $f \in \mathscr{E}$ и каждой пары целых чисел $m > 0$, $n \geqslant 0$ положим

$$p_{n,\,m}(f) = \sup_{-m \leqslant x \leqslant m} |f^{(n)}(x)|.$$

Непосредственно ясно, что $p_{n,\,m}$ — полунормы на $\mathscr{E}$. Для того чтобы функции $f_\alpha \in \mathscr{E}$ сходились к нулю (по некоторому фильтру $\mathfrak{F}$) в топологии $\mathscr{T}$, определяемой полунормами $p_{n,\,m}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_\alpha^{(n)}$ для каждого целого $n \geqslant 0$ равномерно сходились к нулю (по фильтру $\mathfrak{F}$) на каждом компактном множестве из $\mathbf{R}$. Говорят, что $\mathscr{T}$ есть *топология компактной сходимости для функций* $f \in \mathscr{E}$ *и всех их производных.*

Предложение 4. *Каждая локально выпуклая топология в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ может быть задана некоторым множеством полунорм.*

Это — непосредственное следствие предложения 3: топология пространства E определяется множеством всех непрерывных полунорм на E.

В частности, множество *всех* полунорм на векторном пространстве E определяет сильнейшую локально выпуклую топологию в E (§ 2, п° 1).

Замечание. Пусть p и q — две полунормы на векторном пространстве E. Если существует такая постоянная $\alpha > 0$, что $p(x) \leqslant \alpha q(x)$ во всех точках некоторого поглощающего множества A, то, поскольку p

и q положительно однородны, это неравенство выполняется во всех точках пространства E. Тем самым отношение „существует $\alpha > 0$ такое, что $p \leqslant \alpha q^{\alpha}$ равносильно отношению $p \preccurlyeq q$ по фильтру окрестностей нуля для сильнейшей локально выпуклой топологии в E (Функц. вещ. перем., гл. V, § 1, п° 1 ([13])). Допуская вольность речи, мы говорим, что множество Γ_0 полунорм на E — *фильтрующееся* (по отношению $\preccurlyeq$), если для любых двух полунорм $p_1, p_2 \in \Gamma_0$ существует полунорма $q \in \Gamma_0$ такая, что $p_1 \preccurlyeq q$ и $p_2 \preccurlyeq q$. Тогда множества, определяемые всевозможными неравенствами вида $p(x) \leqslant \lambda$, где $p \in \Gamma_0$ и $\lambda > 0$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии, заданной множеством Γ_0. Каково бы ни было множество Γ полунорм на E, можно получить фильтрующееся множество полунорм, определяющее ту же топологию, что и Γ, образовав множество Γ_0 верхних граней всевозможных конечных наборов полунорм, принадлежащих Γ.

Предложение 5. *Пусть Γ — множество полунорм на векторном пространстве E. Для того чтобы топология, определяемая этим множеством, была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \neq 0$ из E существовала полунорма $p \in \Gamma$ такая, что $p(x) \neq 0$.*

Это предложение очевидным образом следует из определений.

Предложение 6. *Для того чтобы локально выпуклое пространство было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым и его топологию можно было задать счетным множеством полунорм.*

Действительно, для того чтобы отделимое локально выпуклое векторное пространство было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы существовала счетная фундаментальная система окрестностей нуля.

Пусть E — локально выпуклое пространство, топология которого задана множеством Γ полунорм. Так как для каждой полунормы p выполняется неравенство $p(x - z) \leqslant p(x - y) + p(y - z)$, то $p(x - y)$ есть *отклонение* на E (Общ. топ., гл. IX, § 1, п° 1) и из определений следует, что когда p пробегает Γ, множество этих отклонений определяет равномерную структуру топологического векторного пространства E.

Пусть теперь E отделимо. Функции $p \in \Gamma$, будучи равномерно непрерывны на E, по непрерывности продолжаются на пополнение $\hat{E}$ пространства E (Общ. топ., гл. II, § 3, теорема 1). Пусть $\hat{\Gamma}$ — мно-

жество этих продолженных функций. В силу принципа продолжения неравенств (Общ. топ., гл. IV, § 5, теорема 1), функции из $\hat{\Gamma}$ являются полунормами на $\hat{E}$; при этом, если через $\hat{p}$ обозначить продолжение функции $p \in \Gamma$ на $\hat{E}$, функции $\hat{p}(x-y)$ образуют систему отклонений, определяющих равномерную структуру пространства $\hat{E}$ (Общ. топ., гл. IX, § 1, n° 6). Мы видим, таким образом, что $\hat{\Gamma}$ есть множество полунорм, определяющих топологию пространства $\hat{E}$.

5. Полунормы в факторпространствах и произведениях пространств

Пусть E — локально выпуклое пространство, топология которого задана множеством Γ полунорм. Сужения этих полунорм на векторное подпространство M пространства E, очевидно, задают в M топологию, индуцируемую из E.

Пусть φ — каноническое отображение пространства E на факторпространство E/M. Пусть, далее, U — симметричная выпуклая открытая окрестность нуля в E и p — ее калибровочная функция, так что U совпадает с множеством тех $x \in E$, для которых $p(x) < 1$. Для каждого $z \in E/M$ множество чисел $\rho > 0$ таких, что $z \in \rho\varphi(U) = \varphi(\rho U)$, совпадает с множеством чисел $\rho > 0$ таких, что существует $x \in E$, для которого $x \in \rho U$ и $\varphi(x) = z$. Отсюда следует (формула (6)), что калибровочная функция $\dot{p}$ множества $\varphi(U)$ задается формулой

$$\dot{p}(z) = \inf_{\varphi(x)=z} p(x). \tag{7}$$

Таким образом, если множество Γ — фильтрующееся (n° 4, замечание), то топология факторпространства E/M задается множеством полунорм $\dot{p}$, где p пробегает Γ.

Рассмотрим, в частности, локально выпуклое пространство E, топология которого задана *одной только* полунормой p. Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы p было нормой (предложение 5). Если p — не норма, то замыканием N точки 0 в E служит векторное подпространство $p^{-1}(0)$; ассоциированное отделимое пространство E/N есть тогда *нормированное* пространство, определяемое нормой $\dot{p}$, соответствующей полунорме p; здесь $\dot{p}(\dot{x}) = p(x)$ для каждого x, принадлежащего классу $\dot{x}$ по модулю N.

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств и f_ι для каждого $\iota\in I$ — линейное отображение E в E_ι. Рассмотрим слабейшую локально выпуклую топологию $\mathfrak{T}_0$ в E, при которой все функции f_ι непрерывны (§ 2, п° 2). Из определения окрестностей нуля для топологии $\mathfrak{T}_0$ (там же) сразу видно, что если Γ_ι для каждого $\iota\in I$ — множество полунорм, определяющих топологию пространства E_ι, то топология $\mathfrak{T}_0$ определяется полунормами $p_\iota\circ f_\iota$, где ι — произвольные индексы из I, а p_ι для каждого $\iota\in I$ — любая полунорма из Γ_ι.

Предложение 7. *Каждое отделимое локально выпуклое пространство изоморфно подпространству произведения банаховских пространств.*

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, топология которого определяется семейством $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ полунорм; N_α для каждого α — подпространство $p_\alpha^{-1}(0)$ в E; E_α — пополнение факторпространства E/N_α, наделенного топологией, определяемой нормой $\dot{p}_\alpha$, соответствующей полунорме p_α, и φ_α — каноническое отображение E на E/N_α. Множество тех $x\in E$, для которых $p_\alpha(x)<1$, есть прообраз шара, определяемого в E/N_α неравенством $\dot{p}_\alpha(z)<1$, относительно отображения φ_α. Это показывает, что топология пространства E — слабейшая, при которой непрерывны линейные отображения φ_α пространства E в пространства E_α, чем предложение и доказано, поскольку E отделимо (гл. I, § 1, предложение 15).

Наконец, пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство его векторных подпространств, f_α для каждого индекса α — каноническое отображение E_α в E и $\mathfrak{T}_\alpha$ — локально выпуклая топология в E_α. Пусть Γ — множество всех полунорм p на E, сужения которых на каждое E_α непрерывны в топологии $\mathfrak{T}_\alpha$. Тогда сильнейшая локально выпуклая топология в E, при которой непрерывны все f_α (§ 2, п° 2), определяется множеством полунорм Γ.

6. Полилинейные непрерывные отображения произведения локально выпуклых пространств в локально выпуклое пространство

Предложение 8. *Пусть E_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и F — локально выпуклые пространства, Γ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и Γ — фильтрующиеся мно-*

жества полунорм, определяющие соответственно топологии пространств E_i и F. Для того чтобы полилинейное отображение u произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ в F было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для каждой полунормы $q \in \Gamma$ существовали полунормы $p_i \in \Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и число $a > 0$ такие, что

$$q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant a p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_n(x_n) \qquad (8)$$

для всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$.

Условие необходимо. Действительно, в силу предположения, для каждой полунормы $q \in \Gamma$ и каждого числа $\beta > 0$ существуют n чисел $\alpha_i > 0$ и полунормы $p_i \in \Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что неравенства $p_i(x_i) \leqslant \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ влекут $q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant \beta$. Пусть тогда $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная точка из $\prod_{i=1}^{n} E_i$ и λ_i для каждого номера i—число >0, удовлетворяющее неравенству $\lambda_i p_i(x_i) \leqslant \alpha_i$. Так как эти неравенства можно записать в виде $p_i(\lambda_i x_i) \leqslant \alpha_i$, то $q(u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n)) \leqslant \beta$, т. е. $q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqslant \frac{\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$. Если теперь $p_i(x_i) = 0$ хотя бы для одного номера i, то λ_i можно взять произвольно большим, так что $q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$; если же все $p_i(x_i) \neq 0$, то можно взять $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{p_i(x_i)}$. В обоих случаях будет выполняться неравенство (8) с $a = \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$.

Обратно, если условие сформулированного предложения выполнено, то u, очевидно, непрерывно в точке $(0, 0, \ldots, 0)$, а значит, и всюду (гл. I, § 1, предложение 6).

Следствие. *Для того чтобы u было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для любой полунормы $q \in \Gamma$ функция $q(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ была ограниченна на некоторой окрестности нуля в $\prod_{i=1}^{n} E_i$.*

Необходимость условия очевидна, а из предыдущего доказательства видно, что выполнение этого условия влечет неравенство (8) и тем самым непрерывность u.

Отметим частный случай предложения 8, относящийся к линейным отображениям.

Предложение 9. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, Γ и Γ' — фильтрующиеся множества полунорм, определяющие соответственно топологии пространств E и F. Для того чтобы линейное отображение u пространства E в F было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для каждой полунормы $q \in \Gamma'$ существовали полунорма $p \in \Gamma$ и число $a > 0$ такие, что*

$$q(u(x)) \leqslant ap(x) \tag{9}$$

для всех $x \in E$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ — две локально выпуклые топологии в векторном пространстве E, а Γ и Γ' — определяющие их фильтрующиеся множества полунорм. Для того чтобы $\mathfrak{T}$ мажорировала $\mathfrak{T}'$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой полунормы $q \in \Gamma'$ существовали полунорма $p \in \Gamma$ и число $a > 0$ такие, что $q(x) \leqslant ap(x)$ для всех $x \in E$.*

Действительно, последнее означает, что тождественное отображение пространства E, наделенного топологией $\mathfrak{T}$, на E, наделенное топологией $\mathfrak{T}'$, непрерывно.

7. *Теорема Хана — Банаха (аналитическая форма).*

Теорема 1 (Хан — Банах). *Пусть p — полунорма на векторном пространстве E над $\mathbf{R}$, M — векторное подпространство в E и f — линейная форма на M такая, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in M$. Тогда на E существует линейная форма $\bar{f}$, продолжающая f и такая, что $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$.*

Можно ограничиться случаем $f \neq 0$. Рассмотрим в E локально выпуклую топологию, определяемую одной только полунормой p. Выпуклое множество A тех x, для которых $p(x) < 1$, не пусто и открыто в E. Пусть N — гиперплоскость пространства M, заданная уравнением $f(x) = 1$. Это — линейное многообразие в E, и так как во всех его точках $p(x) \geqslant 1$, то оно не пересекается с A. Теорема Хана — Банаха в ее геометрической форме (§ 3, теорема 1) показывает, что в E существует гиперплоскость H, содержащая N и не пересекающаяся с A. Пусть $\bar{f}$ — линейная форма на E такая, что

$\overline{f}(x)=1$ на H. Так как на гиперплоскости N подпространства M сужения f и $\overline{f}$ совпадают, то $f(x)=\overline{f}(x)$ на всем M. Наконец, так как 0 принадлежит открытому полупространству, определяемому неравенством $\overline{f}(x)<1$, то это полупространство содержит A и, следовательно, $\overline{f}(x)=1$ влечет $p(x)\geqslant 1$. В силу однородности функций $\overline{f}$ и p, тогда $|\overline{f}(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in E$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть E — нормированное пространство над* $\mathbf{R}$, *M — его векторное подпространство и f — непрерывная линейная форма на M. Тогда на E существует непрерывная линейная форма $\overline{f}$, продолжающая f и такая, что нормы $\|f\|$ и $\|\overline{f}\|$ этих линейных форм* (Общ. топ., гл. X, § 2, n° 2) *равны.*

Достаточно применить теорему 1, приняв $p(x)=\|f\|\,\|x\|$, что даст $\|\overline{f}\|\leqslant\|f\|$. Так как, с другой стороны, по определению, $\|\overline{f}\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|\overline{f}(x)|$, то, очевидно, $\|\overline{f}\|\geqslant\|f\|$, и утверждение доказано.

Утверждение следствия 1 не распространяется на непрерывные линейные отображения нормированного пространства в произвольное нормированное пространство (см. гл. IV, § 5, упражнение 5в и гл. V, § 1, упражнение 12).

Следствие 2. *Пусть E — локально выпуклое пространство, x_0 — точка в E и p — непрерывная полунорма на E. Тогда на E существует непрерывная линейная форма f такая, что $f(x_0)=p(x_0)$ и $|f(x)|\leqslant p(x)$ на всем E.*

Достаточно применить теорему 1 к векторному подпространству M, порожденному точкой x_0, и определенной на M линейной форме $\lambda x_0\to\lambda p(x_0)$.

Отметим, что при $p(x_0)\neq 0$ гиперплоскость, заданная уравнением $f(x)=p(x_0)$, есть опорная гиперплоскость выпуклого тела, определенного неравенством $p(x)\leqslant p(x_0)$, проведенная через точку x_0.

Упражнения. 1) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и f — выпуклая функция, заданная на выпуклом подмножестве H пространства E.

а) Показать, что если f — не постоянная, то она не может принимать свое наибольшее значение в окруженной точке множества H.

б) Показать, что множество тех точек в H, где f достигает своего наибольшего значения, выпукло.

*2) Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, C — непустой открытый выпуклый заостренный конус в E с вершиной x_0, V — выпуклая окрестность точки x_0 в E и f — выпуклая функция, заданная и ограниченная на $C \cap V$. Показать, что $f(x)$ стремится к конечному пределу, когда x стремится к x_0, оставаясь в $C \cap V$. [Можно считать $x_0 = 0$. Пусть $\beta = \limsup_{x \to 0,\, x \in C \cap V} f(x)$; вести рассуждение от противного, предполагая, что существует $\alpha > 0$ такое, что в каждой окрестности нуля имеется точка $y \in C \cap V$, для которой $f(y) < \beta - \alpha$. Показать, что существует точка $a \in C \cap V$ такая, что $f(\rho a) \geqslant \beta - \frac{\alpha}{2}$ для $0 < \rho \leqslant 1$; вывести отсюда, что тогда на прямой, соединяющей точку вида ρa (с достаточно малым ρ) с точкой y в $C \cap V$, достаточно близкой к нулю и такой, что $f(y) < \beta - \alpha$, должны были бы существовать точки множества $C \cap V$, в которых f было бы сколь угодно велико.]

*3) Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство, A — непустое выпуклое множество в E, x_0 — точка прикосновения множества A, f — конечная выпуклая функция, заданная на A, и Δ — множество всех замкнутых полупрямых D с началом x_0 таких, что $D \cap A$ содержит открытый отрезок с концом x_0. Объединение C полупрямых $D \in \Delta$ есть выпуклый конус с вершиной x_0.

а) Показать, что какова бы ни была полупрямая $D \in \Delta$, $f(x)$ стремится к конечному пределу или $+\infty$, когда $x \neq x_0$ стремится к x_0 оставаясь в $D \cap A$.

б) Пусть Ψ — подмножество в Δ, образованное полупрямыми D такими, что $f(x)$ стремится к $+\infty$, когда $x \neq x_0$ стремится к x_0, оставаясь в $D \cap A$; если $x_0 \in A$, то Ψ пусто. Показать, что Ψ не может содержать двух противоположных полупрямых и что если D, D' — две различные полупрямые, принадлежащие Ψ, и P — определяемая ими плоскость, то либо каждая полупрямая $D'' \in \Delta$, содержащаяся в P, принадлежит Ψ, либо D и D' — единственные полупрямые из Ψ, содержащиеся в P. Вывести отсюда, что если $\Psi \neq \Delta$, то никакая полупрямая $D \in \Psi$ не может содержать окруженной точки конуса C.

в) Пусть Φ — дополнение к Ψ относительно Δ. Показать, что объединение C_0 полупрямых $D \in \Phi$ есть выпуклый конус и что для полупрямых $D \in \Phi$ предел $f(x)$, когда $x \neq x_0$ стремится к x_0, оставаясь в $D \cap A$, не зависит от D. [Использовать упражнение 2.] Кроме того, если $x_0 \in A$, то значение этого предела $\leqslant f(x_0)$, причем оно равно $f(x_0)$, когда Φ содержит пару противоположных полупрямых.

г) Если f — не непрерывная линейная форма на E и $A = E$, то каждая замкнутая полупрямая с началом x_0 принадлежит Φ, но $\liminf_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ и $\limsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. [Использовать упражнение 2.]

4. Пусть H — компактное выпуклое множество в конечномерном отделимом топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$. Пока-

зать, что каждая выпуклая функция на H ограниченна снизу. Показать на примере, что это может быть уже неверным, если E не конечномерно. [См. упражнение 3г.]

5) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и A — выпуклое множество в E, содержащее начало. Для каждого $x \neq 0$ из E обозначим через $p(x)$ нижнюю грань чисел $\rho > 0$ таких, что $x \in \rho A$, если такие числа существуют, и $+\infty$ в противном случае; кроме того, положим $p(0) = 0$. Показать, что p — выпуклая положительно однородная функция в E; назовем ее *калибровочной функцией* множества A.

6) Дать: 1° пример конечной выпуклой функции, определенной на открытой полуплоскости H в $\mathbf{R}^2$, не ограниченной на H и не стремящейся ни к какому пределу при стремлении аргумента к точке 0, являющейся граничной для H; 2° пример конечной выпуклой функции, определенной на ограниченном открытом множестве A из $\mathbf{R}^2$ и не стремящейся ни к какому пределу при стремлении аргумеита к некоторой граничной точке этого множества. [Рассмотреть калибровочную функцию диска, имеющего 0 своей граничной точкой.]

7) Пусть U и V — выпуклые открытые множества в отделимом топологическом векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ такие, что $\overline{V} \subset U$ и U не содержит никакой полупрямой. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство конечных выпуклых функций на $\overline{U}$, равномерно ограниченных сверху на границе множества U и равномерно ограниченных снизу на границе множества V. Показать, что $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно на V.

8) Пусть H — выпуклое открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{F}$ — множество конечных выпуклых функций на H и Φ — фильтр в $\mathscr{F}$, сходящийся в каждой точке множества H к иекоторой конечной функции f_0. Показать, что Φ равномерно сходится к f_0 на каждом компактном подмножестве множества H. [Использовать упражнение 7.]

*9) Пусть E — конечномерное отделимое топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$.

а) Пусть $\mathfrak{F}(E)$ — множество всех замкнутых множеств из E, иаделеиное равномерной структурой, получаемой из равномерной структуры пространства E по способу упражнения 7 в Общ. топ., гл. II, § 2 ([14]). Показать, что в полученном пространстве множество $\mathfrak{K}(E)$ всех выпуклых замкнутых множеств из E замкнуто. Вывести отсюда, что множество всех выпуклых замкнутых подмножеств компактного множества $K \subset E$ есть компактное множество в $\mathfrak{K}(E)$ [см. Общ. топ., гл. II, § 4, упражнение 5 ([15])].

б) Пусть F — векторное подпространство пространства E и K — компактное множество в E. Показать, что отображение $C \to C \cap F$ множества всех выпуклых замкнутых множеств $C \subset K$ в $\mathfrak{K}(F)$ непрерывно. Непрерывно ли отображение $C \to C \cap F$ множества $\mathfrak{K}(E)$ в $\mathfrak{K}(F)$?

в) Пусть A пробегает множество $\mathfrak{K}_0(E)$ всех выпуклых компактных множеств в E, имеющих 0 своей окруженной точкой, и

p_A — калибровочная функция (упражнение 5) множества A. Показать что отображение $A \to p_A$ есть изоморфизм равномерного подпространства $\mathfrak{R}_0(E)$ пространства $\mathfrak{R}(E)$ в пространство $\mathcal{C}_c(E, \mathbf{R})$ непрерывных числовых функций на E, наделенное равномерной структурой компактной сходимости (Общ. топ., гл. X, § 1).

10) Пусть A — выпуклое компактное множество в $\mathbf{R}^n$ и B — его проекция на подпространство $\mathbf{R}^{n-1}$ (отождествленное с гиперплоскостью, определяемой уравнением $\xi_n = 0$). Показать, что на B существуют две выпуклые функции f_1, f_2 такие, что A совпадает с множеством тех точек (z, u) из $\mathbf{R}^n$, для которых $z \in B$ и $f_1(z) \leqslant u \leqslant -f_2(z)$.

11) Для того чтобы в локально выпуклом пространстве E существовало выпуклое тело, не содержащее никакого линейного многообразия, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E мажорировала некоторую нормированную топологию в E. Показать, что если это условие выполнено, то границы двух выпуклых тел, не содержащих никакой полупрямой, гомеоморфны.

*12) а) Пусть E — бесконечномерное нормированное пространство над $\mathbf{R}$ и $\mathfrak{T}$ — его топология. Показать, что в E существуют нормированная топология $\mathfrak{T}'$, более сильная чем $\mathfrak{T}$, и нормированная топология $\mathfrak{T}''$, более слабая чем $\mathfrak{T}$. [Окрестности нуля для этих топологий определить с помощью базиса в E, заданного в форме $(a_{\alpha, n})$, где α пробегает некоторое бесконечное семейство индексов A, а n — множество целых чисел $\geqslant 0$, причем $\| a_{\alpha, n} \| = 1$.]

б) Пусть $p(x)$ — норма, определяющая топологию $\mathfrak{T}'$. Показать что если E в топологии $\mathfrak{T}$ — банаховское пространство, то p не может быть полунепрерывной снизу на E в топологии $\mathfrak{T}$. [Воспользоваться теоремой Бэра; см. гл. III, § 1.] Вывести отсюда, что выпуклое множество A, определяемое неравенством $p(x) < 1$, не содержит ни одной внутренней (в топологии $\mathfrak{T}$) точки, хотя все его точки и окруженные.

в) Вывести из б), что если E в топологии $\mathfrak{T}$ — банаховское пространство, то в E существуют незамкнутые (в топологии $\mathfrak{T}$) выпуклые множества, пересечение которых с каждым конечномерным линейным многообразием замкнуто. [См. § 2, упражнение 4, и § 1, упражнение 15.]

13) Для того чтобы множество Γ полунорм на векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ было множеством *всех* полунорм, непрерывных в некоторой локально выпуклой топологии в E, необходимо и достаточно, чтобы Γ удовлетворяло следующим двум условиям: 1° если $p \in \Gamma$, то каждая полунорма q такая, что $q \leqslant ap$ (где a — постоянная), принадлежит Γ; 2° если p и q принадлежат Γ, то и $\sup(p, q)$ принадлежит Γ.

14) Пусть S — произвольное множество, $F = \mathscr{B}(S)$ — банаховское пространство всех ограниченных числовых функций на S, E — произвольное нормированное пространство над $\mathbf{R}$ и M — его векторное подпространство. Показать, что для каждого непрерывного линейного отображения f подпространства M в F существует непрерывное

линейное отображение $\overline{f}$ пространства E в F, продолжающее f и такое, что $\|\overline{f}\| = \|f\|$. [Для каждого $s \in S$ рассмотреть линейную форму $x \to (f(x))(s)$, определенную на M.]

15) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, M — его векторное подпространство, p — полунорма на E и q — полунорма на M такая, что $q(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in M$. Показать, что на E существует полунорма $\overline{q} \leqslant p$, сужение которой на M равно q. [См. § 2, п° 5, лемма 1.]

16) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, p — конечная положительно однородная выпуклая функция (произвольного знака) на E, M — векторное подпространство в E и f — линейная форма на M такая, что $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in M$. Показать, что на E существует линейная форма $\overline{f}$, продолжающая f и такая, что $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$. [В пространстве $E \times \mathbf{R}$, наделенном сильнейшей локально выпуклой топологией, рассмотреть конус C, образованный теми точками (x, t), для которых $p(x) < t$, и принять во внимание, что этот конус — открытый.]

§ 6. Комплексные локально выпуклые пространства

1. *Топологические векторные пространства над* C

Пусть E — топологическое векторное пространство над телом $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Топология пространства E согласуется также со структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$, получающейся при сужении тела скаляров до $\mathbf{R}$. Топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, *базисное* для пространства E (гл. I, § 1, п° 1), мы будем обозначать через E_0. Отметим, что отображение $x \to ix$ (не являющееся на E_0 гомотетией) есть *автоморфизм* u структуры топологического векторного пространства в E_0, обладающий тем свойством, что $u^2(x) = -x$.

Обратно, пусть топологическое векторное пространство F над $\mathbf{R}$ обладает автоморфизмом u таким, что $u^2 = -e$ (где e — тождественный автоморфизм). Как известно (Алг., гл. IX), в F можно тогда ввести структуру векторного пространства над $\mathbf{C}$, для каждого $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ и каждого $x \in F$ положив $\lambda x = \alpha x + \beta u(x)$. Так как отображение $(\alpha, \beta, x) \to \alpha x + \beta u(x)$ произведения $\mathbf{R}^2 \times F$ в F непрерывно, то топология пространства F будет согласоваться с введенной так структурой векторного пространства над $\mathbf{C}$. И F будет топологическим векторным пространством над $\mathbf{R}$, базисным для определенного так топологического векторного пространства E над $\mathbf{C}$.

Пример. Пусть G — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $F = G \times G$. Формула $u(x, y) = (-y, x)$ определяет автомор-

физм u пространства F, имеющий своим квадратом $-e$. Следовательно, ему соответствует в F структура векторного пространства над $\mathbf{C}$, в которой $(\alpha+i\beta)(x, y)=(\alpha x-\beta y, \beta x+\alpha y)$. В частности, $i(x, 0)=(0, x)$ и, значит, $(x, y)=(x, 0)+i(y, 0)$, а это показывает, что определенное так (не топологическое) векторное пространство E над $\mathbf{C}$ получено расширением тела скаляров пространства G до $\mathbf{C}$ (Алг., гл. III, § 2). Мы будем говорнть также, что топологическое векторное пространство E над $\mathbf{C}$ получено из G путем *расширения тела скаляров до* $\mathbf{C}$, и обозначать E также через $G_{(\mathbf{C})}$.

Замечание. Не всякое топологическое векторное пространство F над $\mathbf{R}$ обладает автоморфизмом u, имеющим своим квадратом $-e$. Так, например, в векторном пространстве *нечетной* размерности над $\mathbf{R}$ нельзя ввести структуру векторного пространства над $\mathbf{C}$.

Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{C}$ и E_0 — базисное для него топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$. Каждое линейное многообразие M пространства E есть также линейное многообразие в E_0, обратное же неверно. Во избежание путаницы, мы будем называть линейное многообразие при структуре векторного пространства относительно $\mathbf{C}$ (соотв. относительно $\mathbf{R}$) *комплексным* (соотв. *вещественным*) линейным многообразием. Комплексное линейное многообразие конечной размерности (соотв. факторразмерности) n есть вещественное линейное многообразие размерности (соотв. факторразмерности) $2n$. Для того чтобы вещественное векторное подпространство M пространства E было также комплексным векторным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы $iM\subset M$.

Напомним (Алг., гл. III, § 2), что для топологических векторных пространств E и F над $\mathbf{C}$ отображение E в F называется $\mathbf{C}$-линейным (соотв. $\mathbf{R}$-линейным), если оно является линейным отображением при наделении E и F структурой векторного пространства относительно $\mathbf{C}$ (соотв. $\mathbf{R}$); каждое $\mathbf{C}$-линейное отображение, очевидно, $\mathbf{R}$-линейно, обратное же неверно. Допуская вольность речи, мы $\mathbf{C}$-линейную форму на E будем называть *комплексной* линейной формой, а $\mathbf{R}$-линейную форму на E (т. е. линейную форму на E_0) — *вещественной* линейной формой. Если f — комплексная линейная форма на E, то, очевидно, $g=\Re f$ и $h=\Im f$ — вещественные линейные формы; при этом из соотношения $f(ix)=if(x)$ следует тождество $h(x)=-g(ix)$. Обратно, если g — вещественная линейная форма

на E, то $f(x)=g(x)-ig(ix)$ есть однозначно определенная комплексная линейная форма на E, для которой $\Re f=g$; для того чтобы f была непрерывной на E, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы была непрерывной g.

Пусть теперь H — *комплексная гиперплоскость* в E, заданная уравнением $f(x)=\alpha+i\beta$, где f — комплексная линейная форма на E; полагая $g=\Re f$, мы видим, что H есть пересечение двух *вещественных гиперплоскостей* H_1 и H_2, заданных соответственно уравнениями $g(x)=\alpha$ и $g(ix)=-\beta$; если H *замкнута*, то замкнуты также H_1 и H_2 (гл. I, § 2, теорема 1). Обратно, пусть H_0 — однородная *вещественная* гиперплоскость, с уравнением $g(x)=0$ (где g — вещественная линейная форма на E); тогда $H=H_0\cap iH_0$ есть однородная *комплексная* гиперплоскость, причем ее уравнением служит $f(x)=0$, где f — комплексная линейная форма, для которой $\Re f=g$; если H_0 замкнута, то и H замкнута.

2. *Комплексные локально выпуклые пространства*

Напомним, что в комплексном векторном пространстве E мы используем термин „*диск*“ в качестве синонима для „*уравновешенного* множества“ (гл. I, § 1, n° 3, определение 2); таким образом, утверждение, что множество $A\subset E$ есть диск, означает, что если $x\in A$, то $\rho x\in A$ для всех ρ таких, что $0\leqslant\rho\leqslant 1$, и $e^{i\theta}x\in A$ для всех вещественных θ.

Говорят, что множество A в комплексном векторном пространстве E *выпукло*, если оно выпукло в вещественном векторном пространстве E_0, базисном для E. Для того, чтобы выпуклое множество $A\subset E$ было диском, достаточно, чтобы $e^{i\theta}A\subset A$ для всех вещественных θ; действительно, отсюда прежде всего вытекает, что $-A=A$; так как A симметрично, то оно содержит 0 и, следовательно, $\rho A\subset A$, когда $0\leqslant\rho\leqslant 1$.

Пусть E — комплексное топологическое векторное пространство. Наименьший выпуклый диск (соотв. замкнутый выпуклый диск), содержащий множество $A\subset E$, называется *закругленной выпуклой оболочкой* (соотв. *замкнутой закругленной выпуклой оболочкой*) множества A; замкнутая закругленная выпуклая оболочка множества A есть замыкание его закругленной выпуклой оболочки. Эта последняя есть выпуклая оболочка объединения множеств $e^{i\theta}A$, так что ее можно определить как множество линейных комбинаций

$\sum_i \lambda_i x_i$, где (x_i) — любые конечные семейства точек из A, а (λ_i) — любые семейства комплексных чисел такие, что $\sum_i |\lambda_i| \leqslant 1$. Если A предкомпактно, то и его закругленная оболочка предкомпактна (гл. I, § 1, n° 5), а значит, если E_0 локально выпукло, — и его закругленная выпуклая оболочка предкомпактна (§ 4, предложение 2).

Говорят, что комплексное топологическое векторное пространство E *локально выпукло*, если локально выпукло его базисное вещественное топологическое векторное пространство E_0, т. е. если каждая окрестность нуля в E содержит выпуклую окрестность нуля; топология $\mathfrak{T}$ в E называется *локально выпуклой*, если она согласуется со структурой векторного пространства в E (относительно $\mathbf{C}$) и E, наделенное этой топологией $\mathfrak{T}$, локально выпукло. Так как каждая замкнутая выпуклая окрестность нуля V содержит тогда закругленную окрестность нуля W (гл. I, § 1, предложение 4), то она содержит и замкнутую закругленную выпуклую оболочку U последней; иными словами, *закругленные выпуклые замкнутые* окрестности нуля образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E, притом инвариантную относительно всех гомотетий с ненулевыми коэффициентами.

Обратно, пусть E — комплексное векторное пространство и $\mathfrak{S}$ — базис фильтра в E, образованный *поглощающими выпуклыми дисками*. Как мы знаем (§ 2, n° 1), тогда семейство $\mathfrak{B}$ образов множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях с коэффициентами > 0 является фундаментальной системой окрестностей нуля для локально выпуклой топологии $\mathfrak{T}$ в вещественном векторном пространстве E_0, базисном для E. Так как, кроме того, множества из $\mathfrak{B}$ — диски, то они инвариантны относительно всех гомотетий $x \to e^{i\theta}x$, а это показывает, что $\mathfrak{T}$ согласуется со структурой векторного пространства в E (над $\mathbf{C}$) (гл. I, § 1, предложение 5).

Говорят, что конечная числовая функция p, определенная на комплексном векторном пространстве E, есть *полунорма*, если она удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{SN_{II}}$) n° 3 § 5 и следующей аксиоме:

($\mathrm{SN_I'}$) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $\lambda \in \mathbf{C}$.

То же самое можно выразить, потребовав, чтобы p было полунормой на вещественном векторном пространстве E_0, базисном для E удовлетворяющей условию $p(e^{i\theta}x) = p(x)$ для всех $\theta \in \mathbf{R}$.

Непосредственно ясно, что если Γ есть множество полунорм, определенных на комплексном векторном пространстве E, и $\mathfrak{G}$ — множество всех подмножеств пространства E, определяемых неравенством вида $p(x) < \lambda$, где $p \in \Gamma$ и $\lambda > 0$, то множество $\mathfrak{S}$ пересечений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{G}$ есть фундаментальная система закругленных выпуклых открытых окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии $\mathfrak{T}$ в E. $\mathfrak{T}$ называется еще топологией, *определяемой множеством* Γ *полунорм*. Каждая локально выпуклая топология в комплексном векторном пространстве E может быть определена некоторым множеством полунорм, поскольку калибровочная функция закругленной выпуклой открытой окрестности нуля есть полунорма на E.

Мы предоставляем читателю распространить на комплексные локально выпуклые пространства свойства полунорм, установленные в n° n° 4, 5 и 6 § 5 для полунорм на вещественных локально выпуклых пространствах, равно как и два метода введения локально выпуклой топологии, исследованные в n° n° 2, 3, 4 и 5 § 2.

Комплексное локально выпуклое пространство называется *пространством Фреше*, если оно метризуемо и полно.

3. *Теорема Хана — Банаха*

Из теоремы Хана — Банаха для вещественных топологических векторных пространств, в ее геометрической форме (§ 3, теорема 1), непосредственно вытекает следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть E — комплексное топологическое векторное пространство, A — непустое выпуклое открытое множество в E и M — комплексное линейное многообразие в E, не пересекающееся с A. Тогда существует замкнутая комплексная гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающаяся с A.*

Можно ограничиться тем случаем, когда $0 \in M$. Тогда существует замкнутая вещественная гиперплоскость, содержащая M и не пересекающаяся с A (§ 3, теорема 1). Так как $M = iM$, то замкнутая комплексная гиперплоскость $H = H_0 \cap iH_0$ и будет обладать требуемым свойством.

Следствие. *В комплексном локально выпуклом пространстве E каждое замкнутое комплексное линейное многообразие M есть пересечение содержащих его замкнутых комплексных гиперплоскостей.*

Действительно, каждое $x \notin M$ обладает выпуклой открытой окрестностью V, не пересекающейся с M, и значит существует замкнутая комплексная гиперплоскость H, содержащая M и не пересекающая V; тем более H не содержит x.

Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха (§ 5, теорема 1) также обобщается на комплексные топологические векторные пространства.

Теорема 1 (Хан — Банах). *Пусть p — полунорма на комплексном векторном пространстве E, M — векторное подпространство в E и f —* (комплексная) *линейная форма, определенная на M и такая, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех точек из M. Тогда существует* (комплексная) *линейная форма f_1 на E, продолжающая f и такая, что $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ для всех точек из E.*

Действительно, $g = \Re f$ есть вещественная линейная форма, определенная на M и такая, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ для всех точек из M; следовательно, существует вещественная линейная форма g_1, определенная на E, продолжающая g и такая, что $|g_1(x)| \leqslant p(x)$ на всем E (§ 5, теорема 1). Пусть $f_1(x)$ — комплексная линейная форма $g_1(x) - ig_1(ix)$ на E, имеющая g_1 своей вещественной частью. Для всех вещественных значений θ имеем

$$|\Re(e^{i\theta} f_1(x))| = |\Re(f_1(e^{i\theta}x))| = |g_1(e^{i\theta}x)| \leqslant p(e^{i\theta}x) = p(x);$$

в частности, $|f_1(x)| \leqslant p(x)$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть E — комплексное локально выпуклое пространство и M — комплексное векторное подпространство в E. Для всякой непрерывной линейной формы f на M существует непрерывная линейная форма f_1, определенная на E и продолжающая f.*

Достаточно заметить, что на E существует непрерывная полунорма p такая, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in M$ (§ 5, предложение 9).

Из этого следствия сразу вытекает, что каждое непрерывное линейное отображение подпространства M в произведение $\mathbf{C}^I$ продолжается до непрерывного линейного отображения пространства E в $\mathbf{C}^I$ (см. § 3, следствие 5 предложения 4).

Следствие 2. *Для каждого конечномерного (комплексного) векторного подпространства M отделимого комплексного локально выпуклого пространства E существует замкнутое (комплексное) векторное подпространство N, топологически дополнительное к M.*

С учетом предыдущего замечания доказательство совпадает с доказательством следствия 6 предложения 4 § 3.

Следствие 3. *Пусть E — комплексное нормированное пространство и M — его комплексное векторное подпространство. Для каждой непрерывной линейной формы на M существует непрерывная линейная форма f_1, определенная на E, продолжающая f и такая, что $\|f\| = \|f_1\|$.*

Доказательство совпадает с доказательством следствия 1 теоремы 1 § 5.

Предоставляем читателю сформулировать для комплексных локально выпуклых пространств аналог следствия 2 теоремы 1 § 5, доказательство которого сохраняется без всяких изменений.

Упражнения. 1) Установить для топологических векторных пространств над телом $\mathbf{K}$ кватернионов определения и свойства, соответствующие приведенным в этом параграфе.

2) Введем на p-адическом теле $\mathbf{Q}_p$ (p — простое > 2) норму $|\xi| = 2^{-v_p(\xi)}$, где v_p — p-адическая норма, и на векторном пространстве $E = \mathbf{Q}_p^2$ размерности 2 над $\mathbf{Q}_p$ — норму $\|(\xi, \eta)\| = |\xi| + |\eta|$. Пусть x_0 — вектор (p, p), D — порожденное им одномерное подпространство в E и f — линейная форма на D, определяемая условием $f(x_0) = 1$. Показать, что $\|f\| = 1$, но для каждой линейной формы f_1 на E, продолжающей f, $\|f_1\| \geqslant 2$.

*3) Пусть K — недискретное полное нормированное тело и E — нормированное пространство над K, норма которого удовлетворяет „ультраметрическому“ неравенству $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$.

а) Показать, что норма удовлетворяет ультраметрическому неравенству на каждом факторпространстве пространства E по замкнутому векторному подпространству.

б) Пусть E двумерно над K, x — ненулевой вектор из E, D — порожденное им одномерное векторное подпространство и f — линейная форма на D. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует линейная форма f_1, определенная на E, продолжающая f и такая, что $\|f_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$. [Взять базис в E, образованный вектором x и вектором y, для которого $\|y\| \geqslant \frac{d}{1+\varepsilon}$, где d — расстояние от y до D, и для каждого $z = \lambda x + \mu y \in E$ положить $f_1(z) = f(\lambda x)$.]

в) Пусть E — произвольной размерности и M — векторное подпространство в E, факторпространство E/M по которому обладает счетным базисом над K. Показать, что для каждой непрерывной линейной формы f на M и каждого $\varepsilon > 0$ существует линейная форма f_1, определенная и непрерывная на E, продолжающая f и такая, что $\|f_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$. [Использовать а) и б).]

*4) Пусть K — недискретное полное нормированное тело и E — нормированное пространство над K с нормой, удовлетворяющей ультраметрическому неравенству (упражнение 3). Предположим, кроме того, что образом мультипликативной группы K^* ненулевых элементов из K при отображении $\xi \to |\xi|$ служит *дискретная* подгруппа группы $\mathbf{R}_+^*$ (что, например, имеет место в случае p-адического тела $\mathbf{Q}_p$).

Пусть M — векторное подпространство в E и f — непрерывная линейная форма, определенная на M. Показать, что существует линейная форма f_1, определенная и непрерывная на E, продолжающая f и такая, что $\|f_1\| = \|f\|$. [Применением теоремы Цорна свести к случаю двумерного E, затем рассуждать, как в упражнении 3б.]

*5) Пусть K — тело формальных рядов с вполне упорядоченными (вещественными) показателями и вещественными коэффициентами (Алг., гл. IV, § 5, упражнение 11 ([16])). Для каждого ненулевого элемента $\xi = \sum_{t \in \mathbf{R}} \alpha(t) X^t$ из K положим $|\xi| = \exp(-t_0)$, где t_0 — наименьший элемент множества тех $t \in \mathbf{R}$, для которых $\alpha(t) \neq 0$; положим, кроме того, $|0| = 0$.

а) Показать, что $|\xi|$ есть норма на K и что K, снабженное этой нормой, есть полное нормированное тело.

б) Пусть K_0 — множество в K, состоящее из рядов $\xi = \sum_{t \in \mathbf{R}} \alpha(t) X^t$, для которых показатели $t \in \mathbf{R}$ с $\alpha(t) \neq 0$ образуют возрастающую последовательность (t_n), стремящуюся к $+\infty$ (и зависящую от ξ). Показать, что K_0 есть замкнутое подтело в K.

в) Будем рассматривать K как нормированное пространство над K_0, где за норму элемента $\xi \in K$ принято $|\xi|$. Пусть f — тождественное отображение K_0 на себя. Показать, что на K не существует никакой непрерывной линейной формы f_1, продолжающей f и такой, что $\|f_1\| = \|f\|$. [Рассмотреть значение непрерывной линейной формы f_1, продолжающей f, на элементе $\xi \in K$, для которого показатели $t \in \mathbf{R}$ с $\alpha(t) \neq 0$ образуют строго возрастающую последовательность, ограниченную в $\mathbf{R}$.]

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ II

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КОМПАКТНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Теорема 1 (Марков — Какутани). *Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над* $\mathbf{R}$, *K — непустое компактное выпуклое множество в E и Γ — множество попарно перестановочных аффинных линейных отображений пространства E в себя, переводящих K в себя, сужения которых на K непрерывны. Тогда существует точка $x_0 \in K$ такая, что $u(x_0) = x_0$ для всех $u \in \Gamma$.*

Пусть e — тождественное отображение E на себя. Для каждого $u \in \Gamma$ и каждого целого положительного n положим $u_n = \frac{1}{n}(e + u + u^2 + \ldots + u^{n-1})$ в кольце $\mathcal{A}$ всех аффинных линейных отображений E в себя. Так как K выпукло и $u(K) \subset K$, то $u_n(K) \subset K$; кроме того, сужение u_n на K непрерывно. Пусть Γ_1 — подмножество в $\mathcal{A}$, образованное произведениями всевозможных конечных наборов отображений вида u_n, где u пробегает Γ, а n — множество всех целых чисел > 0. Ясно, что аффинные линейные отображения, принадлежащие Γ_1, попарно перестановочны и сужение каждого $v \in \Gamma_1$ на K непрерывно, причем $v(K) \subset K$.

Множество $\mathfrak{B}$ множеств $v(K)$, где v пробегает Γ_1, есть *базис фильтра* в K. Действительно, если $v \in \Gamma_1$ и $w \in \Gamma_1$, то, полагая $u = vw = wv$, имеем $u \in \Gamma_1$ и $u(K) = v(w(K)) \subset v(K)$ и так же $u(K) \subset w(K)$. В силу непрерывности сужений отображений $v \in \Gamma_1$ на K, множества из $\mathfrak{B}$ *компактны*. Следовательно, пересечение A всех множеств из $\mathfrak{B}$ *не пусто*. Мы покажем, что для каждого $x \in A$ и каждого $u \in \Gamma$ имеет место равенство $u(x) = x$, чем и будет установлена справедливость теоремы. Пусть $x \in A$. Каково бы ни было целое $n > 0$, имеем $x \in u_n(K)$, так что $x = \frac{1}{n}(y + u(y) + \ldots + u^{n-1}(y))$ для некоторого $y \in K$, откуда

$$u(x) - x = \frac{1}{n}(u(y) + u^2(y) + \ldots + u^n(y)) - \\ - \frac{1}{n}(y + u(y) + \ldots + u^{n-1}(y)) = \frac{1}{n}(u^n(y) - y) \in \frac{1}{n}(K - K).$$

Пусть V — уравновешенная окрестность нуля в E и W — уравновешенная окрестность нуля такая, что $W+W\subset V$. Так как $K-K=K'$ компактно (как образ компактного множества $K\times K$ из $E\times E$ при непрерывном отображении $(x, y)\to x-y$), то существует конечное число точек a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ таких, что K' содержится в объединении окрестностей a_i+W. Так как W — поглощающее множество, то существует число α такое, что $0<\alpha\leqslant 1$ и $\alpha a_i\in W$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. Отсюда $\alpha K'\subset W+\alpha W\subset W+W\subset V$. Взяв $n>\frac{1}{\alpha}$, видим, что $u(x)-x\in V$. Так как E отделимо, то заключаем, что $u(x)=x$.

Пример: *существование инвариантного среднего на топологической коммутативной группе.* Пусть G — топологическая коммутативная группа, в аддитивной записи, и $E=\mathcal{C}^\infty(G)$ — векторное пространство всех ограниченных непрерывных числовых функций на G. Снабженное нормой $\|f\|=\sup_{x\in G}|f(x)|$, E есть банаховское пространство; кроме того, E — упорядоченное векторное пространство (где отношение $f\geqslant 0$ означает „$f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in G$“). Алгебраическое сопряженное*) E^* к E, наделенное топологией простой сходимости на E, есть отделимое локально выпуклое пространство. Пусть K — подмножество в E^*, образованное *положительными* линейными формами μ на E, удовлетворяющими условию $\mu(1)=1$ („средние“ на G; см. Интегрир., гл. III, § 1). Для каждой линейной формы $\mu\in K$ и каждой функции $f\in E$ имеем $|\mu(f)|=|\mu(f^+-f^-)|\leqslant\mu(f^+)+\mu(f^-)\leqslant 2\|f\|$. Ясно, что K *замкнуто* в E^*, а последнее неравенство показывает (в силу теоремы Тихонова), что K *компактно*; кроме того, K очевидно *выпукло*.

Пусть теперь f_s, для каждого $s\in G$ и каждой функции $f\in E$, — функция $x\to f(x+s)$; очевидно, $f_s\in E$. Для каждой линейной формы $\mu\in E^*$, $f\to\mu(f_s)$ есть снова линейная форма на E; обозначим ее μ_s. Наконец, $\mu\to\mu_s$ есть линейное отображение E^* в себя; обозначим его U_s. Непосредственно ясно, что $U_s(K)\subset K$ и U_s непрерывно на E^*. Кроме того, так как, для любых двух элементов $s, t\in G$, $f_t(x+s)=f_{s+t}(x)$, то $\mu_s(f_t)=\mu_{s+t}(f)$ для любых $f\in E$ и $\mu\in E^*$ и, следовательно, $U_sU_t=U_tU_s=U_{s+t}$. Таким образом, к компактному множеству K и семейству линейных отображений U_s (где s пробегает G) применима теорема 1, и, следовательно, существует среднее $\mu\in K$ такое, что $\mu_s=\mu$ для $s\in G$; говорят, что μ *инвариантно относительно сдвигов из* G (см. Интегрир., гл. III, § 1).

---

*) Т. е. векторное пространство всех линейных форм на E (см. гл. IV, § 1, n° 1). — *Прим. перев.*

У п р а ж н е н и я. 1) Пусть E—топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$, K — непустое компактное выпуклое множество в E и Γ — *разрешимая* группа (Алг., гл. I, § 6, упражнение 14) аффинных линейных отображений пространства E в себя, сужения которых на K непрерывны, причем $u(K) \subset K$ для всех $u \in \Gamma$. Показать, что существует точка $x_0 \in K$ такая, что $u(x_0) = x_0$ для всех $u \in \Gamma$. [Индукцией по длине композиционного ряда для Γ, последовательные факторгруппы которого коммутативны, с использованием теоремы 1.]

2) Пусть G — топологическая группа и $E = \mathcal{C}^\infty(G)$ — упорядоченное векторное пространство всех ограниченных непрерывных числовых функций на G (где $f \geqslant 0$ означает „$f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in G$“). Говорят, что положительная линейная форма μ на E есть среднее на G, если $\mu(1) = 1$. Для каждого $s \in G$ и каждой функции $f \in E$ обозначим через ${}_sf$ (соотв. f_s) ограниченную непрерывную числовую функцию на G, определенную формулой ${}_sf(x) = f(sx)$ (соотв. $f_s(x) = f(xs)$). Говорят, что среднее μ на G *инвариантно слева* (соотв. *справа*) относительно сдвигов из G, если $\mu({}_sf) = \mu(f)$ (соотв. $\mu(f_s) = \mu(f)$) для всех $s \in G$ и всех $f \in E$. Если на G существует среднее μ, инвариантное слева, то существует среднее μ_1, инвариантное слева и справа. [Полагаем $\mu'(f) = \mu(g)$, где $g(x) = f(x^{-1})$, и $\mu_1(f) = \mu'(f')$, где $f'(x) = \mu(f_x)$.] Показать, что на разрешимой группе G существует среднее, инвариантное слева и справа. [Использовать упражнение 1.]

*3) Пусть S — множество, наделенное группой операторов Γ (Алг., гл. I, § 7, n° 2), и $E = \mathscr{B}(S)$ — векторное пространство (над $\mathbf{R}$) всех числовых функций, определенных и ограниченных на S. Наделим E группой операторов Γ, положив $sf(x) = f(s^{-1}x)$ для каждой функции $f \in E$ и каждого $s \in \Gamma$. Предположим, что группа Γ (наделенная дискретной топологией) обладает инвариантным слева средним μ.

Пусть $g \geqslant 0$ — функция из E, E_1 — векторное подпространство в E, порожденное преобразованиями sg функции g посредством операторов $s \in \Gamma$, и E_2 — векторное подпространство в E, порожденное функциями $\geqslant 0$, мажорируемыми функциями из E_1. Показать, что если на E_1 существует положительная линейная форма $\varphi \neq 0$ такая, что $\varphi(sf) = \varphi(f)$ для всех $f \in E_1$ и всех $s \in \Gamma$, то на E_2 существует положительная линейная форма $\psi \neq 0$ такая, что $\psi(sf) = \psi(f)$ для всех $f \in E_2$ и всех $s \in \Gamma$. [Используя упражнение 2 § 3, доказать прежде всего существование положительной линейной формы $\overline{\varphi}$ на E_2, продолжающей φ.]

Случай $g = 1$.

°4) а) Показать, что существует аддитивная функция множества $\lambda(A) \geqslant 0$, определенная для всех ограниченных множеств на числовой плоскости $\mathbf{R}^2$, инвариантная относительно всех движений и равная 1 для замкнутого квадрата C с центром 0 и стороной 1. [Применить упражнение 3, приняв за Γ группу всех движений в $\mathbf{R}^2$ и за g —

характеристическую функцию квадрата C; принять во внимание, что Γ разрешима.]

б) Показать, что существует аддитивная функция множества $\lambda(A) \geqslant 0$, определенная на всех множествах из $\mathbf{R}^2$, инвариантная относительно всех подобий и равная 1 для $A = \mathbf{R}^2$. [Тот же метод, в применении к группе подобий.]

5) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и G — разрешимая группа его автоморфизмов, M — векторное подпространство в E, инвариантное относительно G, и p — полунорма на E такая, что $p(sx) = p(x)$ для всех $x \in E$ и всех $s \in G$. Показать, что для всякой линейной формы u на M такой, что $|u(x)| \leqslant p(x)$ и $u(sx) = u(x)$ для всех $x \in M$ и всех $s \in G$, существует линейная форма $\bar{u}$, продолжающая u на E и такая, что $|\bar{u}(x)| \leqslant p(x)$ и $\bar{u}(sx) = \bar{u}(x)$ для всех $x \in E$ и всех $s \in G$. [В пространстве $\mathbf{R}^E$ рассмотреть множество K всех линейных форм f на E таких, что $f(x) = u(x)$ для $x \in M$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$; показать, что K — непустое компактное выпуклое множество, и использовать упражнение 1.]

ГЛАВА III

ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Все векторные пространства, рассматриваемые в этой и следующей главах, всюду, где не оговорено противное, имеют своим телом скаляров тело вещественных или комплексных чисел; если тело скаляров явно не указано, то это означает, что утверждение справедливо как в том случае, когда телом скаляров служит **R**, *так и в том случае, когда телом скаляров служит* **C**. *Если одновременно рассматривается несколько векторных пространств, то подразумевается (если не оговорено противное), что они имеют одно и то же тело скаляров.*

§ 1. Бочечные пространства

1. Определение бочечного пространства

Определение 1. *Бочкой в локально выпуклом пространстве E называется каждое замкнутое поглощающее уравновешенное выпуклое множество. Локально выпуклое пространство E называется бочечным, если каждая бочка в E есть окрестность нуля.*

Существуют не бочечные локально выпуклые пространства (упражнения 4 и 5), а следующее предложение доставляет важные примеры бочечных пространств:

Предложение 1. *Каждое локально выпуклое пространство E, являющееся бэровским пространством* (Общ. топ., Рез., § 1, n° 17; гл. IX, § 5, определение 3), *бочечно.*

Действительно, пусть T — бочка в E; так как T — поглощающее множество, то E есть объединение *замкнутых* множеств nT (где n — целые > 0); так как E — бэровское пространство, то по крайней мере одно из этих множеств обладает внутренней точкой (Общ. топ., Рез., § 1, n° 17; гл. IX, § 5, определение 3), а значит, и T само имеет внутреннюю точку x_0. Если $x_0 = 0$, то тем самым T

есть окрестность нуля; если же $x_0 \neq 0$, то, поскольку и $-x_0 \in T$, 0, как точка открытого отрезка с концами x_0 и $-x_0$, есть внутренняя точка выпуклого множества T (гл. II, § 1, предложение 15) и снова справедливо то же заключение.

Следствие. *Каждое пространство Фреше (и, в частности, каждое банаховское пространство) бочечно.*

Замечание. Пусть p — полунорма, определенная на локально выпуклом пространстве E, и T — поглощающее уравновешенное выпуклое множество, образованное теми $x \in E$, для которых $p(x) \leqslant 1$. Для того чтобы T было бочкой, необходимо и достаточно, чтобы p было *полунепрерывно снизу* на E (Общ. топ., Рез., § 6, n° 18; гл. IV, § 6, предложение 1 ([17])). Следовательно, для того чтобы E было бочечным пространством, необходимо и достаточно, чтобы каждая полунепрерывная снизу полунорма на E была непрерывна (гл. II, § 5, предложение 3).

2. Свойства бочечных пространств

Предложение 2. *Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство бочечных пространств и f_ι для каждого $\iota \in I$ — линейное отображение F_ι в векторное пространство E. Пространство E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, в которой непрерывны все отображения f_ι* (гл. II, § 2, n° 2), *бочечно.*

Действительно, пусть T — бочка в E. Так как отображение f_ι непрерывно, то $f_\iota^{-1}(T)$ есть замкнутое выпуклое множество в F_ι, притом уравновешенное и поглощающее, иными словами — бочка в F_ι; так как F_ι бочечно, то, следовательно, $f_\iota^{-1}(T)$ есть окрестность нуля в F_ι для каждого $\iota \in I$ и, значит, T есть окрестность нуля в E (гл. II, § 2, предложение 1).

Следствие 1. *Каждое факторпространство бочечного пространства есть бочечное пространство.*

Следствие 2. *Каждый индуктивный предел* (гл. II, § 2, n° 4) *бочечных пространств есть бочечное пространство.*

Следствие 3. *Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство локально выпуклых пространств и E — его топологическая прямая*

сумма (гл. II, § 2, n° 3). *Для того чтобы E было бочечным пространством, необходимо и достаточно, чтобы было бочечным каждое E_ι.*

Достаточность условия очевидна в силу следствия 2; оно необходимо согласно следствию 1, поскольку каждое E_ι изоморфно факторпространству пространства E (гл. II, § 2, n° 3).

Замечания. 1) Можно показать, что каждое произведение бочечных пространств есть бочечное пространство (гл. IV, § 2, упражнение 9).

2) Замкнутое векторное подпространство бочечного пространства не обязательно бочечно (гл. IV, § 2, упражнение 9 и § 5, упражнение 21).

Упражнения. 1) Показать, что в бочечном пространстве каждое замкнутое поглощающее выпуклое множество есть окрестность нуля.

2) Показать, что пополнение отделимого бочечного пространства бочечно.

3) Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Показать, что E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией (гл. II, § 2, n° 1), бочечно. Получить отсюда примеры бочечных пространств, не метризуемых и не являющихся бэровскими пространствами (см. гл. I, § 1, упражнение 7 и гл. II, § 2, упражнения 6 и 9).

*4) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, обладающее бесконечным счетным базисом (a_n).

а) Показать, что E обладает топологически свободным счетным базисом (e_n). [Определить векторы e_n по индукции, воспользовавшись тем, что каждая прямая в E имеет топологическое дополнение.]

б) Показать, что для того, чтобы E было бочечным пространством, необходимо и достаточно, чтобы его топология $\mathfrak{T}$ совпадала с сильнейшей локально выпуклой топологией в E. [Принять во внимание, что уравновешенная выпуклая оболочка каждой последовательности $(\lambda_n e_n)$ замкнута в E.] В частности, если $\mathfrak{T}$ метризуема, то E не бочечно. [См. упражнение 3.]

5) Пусть I — несчетное множество и E — пространство $\mathbf{R}^{(I)}$, наделенное (локально выпуклой) топологией $\mathfrak{T}_0$, определенной в упражнении 7 § 1 гл. II. Показать, что E, которое в топологии $\mathfrak{T}_0$ полно, не является бочечным в этой топологии. [Рассмотреть множество T тех $x = (\xi_\iota) \in E$, для которых $\sum_{\iota \in I} |\xi_\iota| \leqslant 1$, и показать, что T — бочка; далее использовать упражнение 7 § 2 гл. II.]

6) Пусть E — банаховское пространство, содержащее тотальное алгебраически свободное семейство (a_n) (например, пространство $L^1(\mathbf{N})$), и пусть B — базис в E, в который входят все a_n; как известно (гл. II,

§ 3, упражнение 15), B несчетен. Пусть, далее, (e_n) — последовательность попарно различных элементов из B, отличных от всех a_n, C — дополнение к множеству всех e_n в B, и F_n — векторное подпространство в E, порожденное множеством C и векторами e_k с $k \leqslant n$, так что E есть объединение подпространств F_n. Пусть, наконец, S — шар $\|x\| \leqslant 1$ в E. Показать, что существует номер n такой, что $S \cap F_n$ — множество II категории. Вывести отсюда, что F_n, с этим n, есть неполное метризуемое бэровское пространство.

*7) а) Показать, что любое произведение $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ полных метрических пространств есть бэровское пространство. [Заметить, что если (A_n) — последовательность элементарных множеств в E (Общ. топ., Рез., § 7, n° 5; гл. I, § 8, n° 1), удовлетворяющая условию $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$, то существует счетное подмножество $J \subset I$ такое, что каждое A_n имеет вид $B_n \times \prod_{\iota \notin J} F_\iota$, где $B_n \subset \prod_{\iota \in J} F_\iota$. Вывести отсюда, что если выбрать последовательность (A_n) так, чтобы диаметр множества $\mathrm{pr}_\iota(A_n)$ стремился к нулю для каждого индекса ι такого, что $\mathrm{pr}_\iota(A_n) \neq F_\iota$ хотя бы для одного n, то пересечение множеств A_n будет не пусто.]

б) Получить из а) примеры неметризуемых локально выпуклых пространств, являющихся полными отделимыми бэровскими пространствами.

§ 2. Ограниченные множества в топологических векторных пространствах

1. Определение ограниченных множеств

Определение 1. *Множество A в топологическом векторном пространстве E называется ограниченным, если оно поглощается каждой окрестностью нуля.*

Это означает (гл. I, § 1, n° 3), что для каждой окрестности нуля V существует вещественное число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda A \subset V$. Для того чтобы множество A было ограниченным, достаточно, чтобы оно поглощалось каждой окрестностью из фундаментальной системы окрестностей нуля.

Каждое множество, сводящееся к одной точке, ограниченно, поскольку каждая окрестность нуля в E есть поглощающее множество (гл. I, § 1, n° 3).

Пусть E — локально выпуклое пространство, топология которого задана множеством Γ полунорм. Для того чтобы множество A из E было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждая полу-

норма $p \in \Gamma$ была ограниченна на A; это сразу следует из определения окрестностей нуля в E (гл. II, § 5, n° 4).

В частности, для ограниченности множества A в нормированном пространстве E необходимо и достаточно, чтобы норма $\|x\|$ была ограниченна на A или, иначе, чтобы A содержалось в некотором шаре с центром 0; другими словами, A должно быть ограниченным относительно структуры метрического пространства в E (Общ. топ., Рез., § 3, n° 7; гл. IX, § 2, n° 2) (см. упражнения 2 и 3).

Замечания. 1) Как видим, в нормированном пространстве существует фундаментальная система окрестностей нуля, образованная *ограниченными* множествами. Можно показать, что, обратно, если в отделимом локально выпуклом пространстве имеется ограниченная окрестность нуля, то топология этого пространства может быть определена нормой (упражнение 2).

2) В *отделимом* топологическом векторном пространстве ограниченное множество не может содержать никакой полупрямой с началом 0; действительно, для каждого $x \neq 0$ существует окрестность нуля V такая, что $x \notin V$; если поэтому $\lambda > 0$ таково, что $A \subset \lambda V$, то $\lambda x \notin A$.

2. Свойства ограниченных множеств

Ясно, что если A — ограниченное множество в топологическом векторном пространстве E, то λA ограниченно для каждого скаляра λ; и ограниченно также любое подмножество множества A. Пусть M — векторное подпространство в E; для того чтобы множество из M было ограниченно в M, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченно в E.

Определение 2. *Множество $\mathfrak{B}$ ограниченных подмножеств топологического векторного пространства E называется фундаментальной системой ограниченных множеств, если каждое ограниченное подмножество пространства E содержится в некотором множестве из $\mathfrak{B}$.*

Так, например, в нормированном пространстве шары с центром 0 и радиусом n (где n — целые числа > 0) образуют фундаментальную систему ограниченных множеств.

Предложение 1. *Объединение двух ограниченных множеств элементов топологического векторного пространства E есть ограниченное множество.*

Действительно, пусть A и B — ограниченные множества; для каждой уравновешенной окрестности нуля V существуют числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что $A \subset \alpha V$ и $B \subset \beta V$; тогда ясно, что $A \cup B \subset \gamma V$, где $\gamma = \max(\alpha, \beta)$.

Предложение 2. *Замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка ограниченного множества элементов локально выпуклого пространства E есть ограниченное множество.*

Действительно, пусть A — ограниченное множество в E, C — его замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка и V — уравновешенная выпуклая окрестность нуля. Существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda A \subset V$; тогда и $\lambda C \subset V$. А так как замкнутые уравновешенные выпуклые окрестности нуля образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E, то тем самым предложение доказано.

Следствие. *Замкнутые уравновешенные выпуклые ограниченные множества в локально выпуклом пространстве образуют фундаментальную систему ограниченных множеств.*

Замечание. В не локально выпуклом топологическом векторном пространстве E выпуклая оболочка ограниченного множества не обязательно ограниченна (упражнение 8). Однако уравновешенная оболочка ограниченного множества, очевидно, ограниченна. С другой стороны, и замыкание любого ограниченного множества A в E ограниченно; действительно, для любой замкнутой окрестности нуля V в E существует $\lambda > 0$ такое, что $A \subset \lambda V$, а так как λV замкнуто, то и $\overline{A} \subset \lambda V$.

Предложение 3. *В отделимом топологическом векторном пространстве E каждое предкомпактное множество ограниченно.*

Действительно, пусть A — предкомпактное множество в E и V — уравновешенная окрестность нуля. Существует конечное число точек $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что окрестности $a_i + V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ образуют покрытие множества A. Множество B точек a_i, будучи конечным, ограниченно (предложение 1); поэтому существует скаляр λ такой, что $0 < \lambda < 1$ и $\lambda B \subset V$. Следовательно, $\lambda A \subset \lambda B + \lambda V \subset V + V$, и предложение доказано.

Следствие. *В отделимом топологическом векторном пространстве множество точек последовательности Коши ограниченно.*

Действительно, это множество, как известно, предкомпактно (Общ. топ., гл. II, § 4, n° 2).

Заметим, что ограниченное множество, вообще говоря, не обязательно предкомпактно; например, единственными нормированными пространствами, в которых каждое ограниченное множество предкомпактно, являются конечномерные пространства (гл. I, § 2, теорема 3) (см. гл. IV, § 3, n° 4).

Предложение 4. *Для того чтобы множество A в топологическом векторном пространстве E было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x_n) точек из A и любой последовательности (λ_n) скаляров $\geqslant 0$, стремящейся к нулю, последовательность $(\lambda_n x_n)$ стремилась к нулю.*

Условие *необходимо*. Действительно, пусть V — произвольная уравновешенная окрестность нуля в E. По предположению, существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda x_n \in V$ для каждого номера n и каждого λ с $|\lambda| \leqslant \alpha$; с другой стороны, существует n_0 такое, что $\lambda_n \leqslant \alpha$ для всех $n \geqslant n_0$; следовательно, $\lambda_n x_n \in V$ для всех $n \geqslant n_0$.

Условие *достаточно*. Действительно, если A — неограниченное множество в E, то в E существует уравновешенная окрестность нуля U такая, что A не содержится ни в какой из окрестностей nU ($n \geqslant 1$); таким образом, для каждого целого $n > 0$ существует $x_n \in A$ такое, что $x_n \notin nU$, откуда $\frac{1}{n} x_n \notin U$ и, значит, последовательность $\left(\frac{1}{n} x_n\right)$ не стремится к нулю.

Следствие. *Для того чтобы множество A в E было ограниченным, достаточно, чтобы было ограниченно всякое счетное подмножество из A.*

3. Образ при непрерывном отображении

Предложение 5. *Пусть $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ — произведение произвольного семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ топологических векторных пространств,*

F — топологическое векторное пространство и f — непрерывное отображение E в F, для которого существует число $s > 0$ такое, что $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$ каково бы ни было $\lambda > 0$. Тогда f отображает каждое множество $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$, где B_ι — ограниченное множество из E_ι ($\iota \in I$), в ограниченное подмножество пространства F.

Нужно только доказать (предложение 4), что если (x_n) — последовательность точек из B и (λ_n) — последовательность скаляров > 0, стремящаяся к нулю, то последовательность с общим членом $\lambda_n f(x_n)$ стремится к нулю в F. Но $\lambda_n f(x_n)$ можно представить в виде $f(y_n)$, где $y_n = \lambda_n^{1/s} x_n = (\lambda_n^{1/s} x_{n,\iota})_{\iota \in I}$. Так как $s > 0$ и $x_{n,\iota} \in B_\iota$ для каждого n, то последовательность $(\lambda_n^{1/s} x_{n,\iota})_{n \geqslant 0}$ стремится в E_ι к нулю для каждого $\iota \in I$ (предложение 4); но тогда последовательность (y_n) стремится к нулю в E. Так как f непрерывно и $f(0) = 0$, то заключаем, что последовательность $(f(y_n))$ стремится к нулю в F, и предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и F — топологические векторные пространства, f — непрерывное полилинейное отображение произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ в F и B_i — ограниченное множество в E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда f отображает $\prod_{i=1}^{n} B_i$ в ограниченное подмножество пространства F.*

Следствие 2. *Пусть E и F — топологические векторные пространства. Образ ограниченного множества из E при непрерывном линейном отображении E в F есть ограниченное подмножество пространства F.*

Следствие 3. *Пусть $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ — произведение произвольного семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ топологических векторных пространств; для того чтобы множество $B \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{pr}_\iota B$ было ограниченно в E_ι для каждого $\iota \in I$.*

Условие достаточно, ибо при его выполнении $\prod_{\iota \in I} \mathrm{pr}_\iota B$ есть ограниченное множество в E в силу предложения 5 (где за f принято

тождественное отображение), а $B \subset \prod_{\iota \in I} \mathrm{pr}_\iota B$. Условие необходимо в силу следствия 2.

Следствие 4. *Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических векторных пространств, E — векторное пространство и f_ι, для каждого $\iota \in I$, — линейное отображение E в F_ι. Пусть E наделено слабейшей топологией, в которой непрерывны все f_ι* (гл. I, § 1, n° 9); *для того чтобы множество $B \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $f_\iota(B)$ было ограниченно в F_ι для каждого $\iota \in I$.*

Действительно, рассмотрим отображение $\varphi = (f_\iota)$ пространства E в $F = \prod_{\iota \in I} F_\iota$; из определений непосредственно следует, что для того, чтобы B было ограниченным в E, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(B)$ было ограниченно в F (поскольку топология пространства E является прообразом топологии произведения F относительно отображения φ) утверждение вытекает тогда из следствия 3, поскольку $\mathrm{pr}_\iota(\varphi(B)) = f_\iota(B)$ для всех $\iota \in I$.

Следствие 5. *Если A и B — ограниченные множества в топологическом векторном пространстве E, то и $A + B$ ограниченно в E.*

Действительно, $A \times B$ ограниченно в $E \times E$ (следствие 3), а $A + B$ есть образ $A \times B$ при непрерывном линейном отображении $(x, y) \to x + y$ произведения $E \times E$ в E.

4. Ограниченные множества в строгом индуктивном пределе

Предложение 6. *Пусть локально выпуклое пространство E есть строгий индуктивный предел возрастающей последовательности (E_n) своих замкнутых векторных подпространств* (гл. II, § 2, n° 5). *Для того чтобы множество $B \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в одном из подпространств E_n и было в нем ограниченно.*

Условие достаточно, поскольку топология, индуцированная в E_n из E, совпадает с топологией, заданной в E_n (гл. II, § 2, предложение 3). Установление необходимости условия сводится (в силу предложения 4) к доказательству того, что если последовательность (x_m) точек из E не содержится ни в каком из подпро-

странств E_n, то она не может стремиться к нулю. Но, действительно, извлекая, если нужно, из последовательности (x_n) надлежащую подпоследовательность, можно считать, что существует строго возрастающая последовательность (n_k) номеров такая, что $x_k \notin E_{n_k}$ и $x_k \in E_{n_{k+1}}$ для каждого номера k. Следовательно, существует (гл. II, § 2, п° 5, лемма 1) возрастающая последовательность (V_k) выпуклых множеств таких, что V_k есть окрестность нуля в E_{n_k}, $V_{k+1} \cap E_{n_k} = V_k$ и $x_k \notin V_{k+1}$ для всех k. Объединение V множеств V_k есть тогда окрестность нуля в E и $x_k \notin V$ для всех k, а это показывает, что последовательность (x_k) не стремится к 0.

Утверждение предложения 6 уже не обязательно справедливо для пространства E, являющегося индуктивным пределом несчетного фильтрующегося семейства своих замкнутых подпространств [Интегрир., гл. III, § 2, упражнение 3 (⁹)].

5. *Квазиполные пространства*

Определение 3. *Топологическое векторное пространство E называется квазиполным, если каждое замкнутое ограниченное множество в E есть полное равномерное пространство* (относительно равномерной структуры, индуцированной из E).

Ясно, что полное пространство квазиполно; в гл. IV мы познакомимся с примерами квазиполных пространств, не являющихся полными (гл. IV, § 2, следствие 2 теоремы 1 и § 1, упражнение 11). В квазиполном пространстве E каждая последовательность Коши, как подмножество замкнутого ограниченного множества (следствие предложения 3 и замечание после предложения 2), сходится. В частности, квазиполное *метризуемое* векторное пространство *полно*.

В квазиполном отделимом локально выпуклом пространстве замкнутая выпуклая оболочка каждого предкомпактного множества *компактна*, ибо она предкомпактна (гл. II, § 4, предложение 2) и тем самым ограниченна (предложения 2 и 3), а следовательно полна.

Каждое *замкнутое* векторное подпространство квазиполного пространства квазиполно. С другой стороны, из предложения 6 следует, что строгий индуктивный предел E последовательности замкнутых в E квазиполных подпространств E_n есть квазиполное пространство. Наконец, справедливо следующее предложение:

Предложение 7. *Произведение квазиполных пространств квазиполно.*

Действительно, пусть $E=\prod_\iota E_\iota$ — произведение квазиполных пространств E_ι и B — замкнутое ограниченное множество в E. $\mathrm{pr}_\iota B=A_\iota$ ограниченна в E_ι для каждого индекса ι (следствие 3 предложения 5), следовательно $\bar{A}_\iota$, будучи ограниченным и замкнутым в E_ι (замечание после предложения 2), полно. Но B замкнуто и содержится в полном пространстве $\prod_\iota \bar{A}_\iota$, значит само полно.

Заметим, что факторпространство полного пространства по его замкнутому подпространству не обязательно квазиполно (гл. IV, § 4, упражнение 10).

Предложение 8. *Пусть E — топологическое векторное пространство и M — его векторное подпространство такое, что каждая точка из E есть точка прикосновения некоторого ограниченного множества из M. Тогда каждое непрерывное линейное отображение f подпространства M в квазиполное отделимое топологическое векторное пространство F однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения пространства E в F.*

Действительно, из предположения следует, что M всюду плотно в E, а потому f однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $\bar{f}$ пространства E в пополнение $\hat{F}$ пространства F. Пусть x — произвольная точка из E. Так как x есть точка прикосновения некоторого ограниченного множества B из M, то $\bar{f}(x)$ есть точка прикосновения множества $f(B)$ в $\hat{F}$. А так как $f(B)$ ограниченно в F, то его замыкание в F в силу предположения есть полное подмножество в F (см. замечание после предложения 2) и, следовательно, совпадает с замыканием множества $f(B)$ в $\hat{F}$, чем и доказано, что $\bar{f}(x)\in F$.

Упражнения. 1) Пусть E — топологическое левое векторное пространство над недискретным топологическим телом K. Множество $B\subset E$ называется *ограниченным*, если для каждой окрестности нуля V в E существует $\lambda\neq 0$ в K такое, что $\lambda B\subset V$.

а) Показать, что если B ограниченно в E, то для каждой окрестности нуля V из E существует окрестность нуля U в K такая, что $UB\subset V$.

б) Показать, что замыкание ограниченного множества ограниченно. Распространить на ограниченные множества в E предложения 1 и 3, а также следствия предложения 5.

в) Пусть F — топологическое левое векторное пространство над K и f — непрерывное отображение E в F, обладающее следующим свойством: для каждой окрестности нуля U в K существует $\mu \neq 0$ в K такое, что $\mu f(x) \in f(Ux)$ для всех $x \in E$. Показать, что образ каждого ограниченного множества из E при отображении f ограничен в F.

г) Показать, что если A — ограниченное множество в K (рассматриваемом как левое векторное пространство над самим собой), а B — ограниченное множество в E, то AB — ограниченное множество в E.

д) Распространить предложение 4 на случай метризуемого топологического тела K.

е) Распространить на топологические векторные пространства над K понятие квазиполного пространства и его свойства.

*2) а) Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным топологическим телом K. Показать, что если на E существует ограниченная окрестность нуля V (упражнение 1), то множества λV ($\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E, и обратно. Если K метризуемо, то отделимая топология, ассоциированная с топологией пространства E, метризуема. Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то верхняя грань локально выпуклых топологий, мажорируемых топологией пространства E (гл. II, § 3, упражнение 14), может быть определена одной полунормой.

б) Показать, что топология произведения бесконечного числа отделимых локально выпуклых пространств (не сводящихся к одному элементу 0) не может быть определена одной полунормой.

в) Пусть E — локально выпуклое пространство, топология которого определена возрастающей последовательностью (p_n) полунорм. Для того чтобы она могла быть определена одной полунормой, необходимо и достаточно существование номера n_0 такого, чтобы для каждого $n \geqslant n_0$ при некотором $k_n \geqslant 0$ удовлетворялось для всех $x \in E$ неравенство $p_n(x) \leqslant k_n p_{n_0}(x)$.

г) Пусть $\mathscr{D}_I$ — векторное пространство над $\mathbf{R}$ всех бесконечно дифференцируемых числовых функций на интервале $I = [0, 1]$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ положим

$$p_n(f) = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(\sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \right)$$

(где $f^{(0)}(x) = f(x)$). Показать, что p_n — нормы на $\mathscr{D}_I$ и что топология в $\mathscr{D}_I$, определяемая этой последовательностью норм, не может быть определена одной нормой.

3) Пусть E — метризуемое векторное пространство над $\mathbf{R}$ и d — расстояние на E, инвариантное относительно переносов и согласующееся с топологией пространства E; положим $|x| = d(x, 0)$ (гл. I,

§ 3, n° 1). Показать, что $\frac{1}{n}|x| \leqslant \left|\frac{x}{n}\right|$ для каждого целого $n > 0$. Вывести отсюда, что если B — ограниченное миожество в E, то $\sup_{x \in B} |x| < +\infty$ (иначе говоря, B ограниченно по метрике d). Дать пример метризуемого векторного пространства E и множества, не ограниченного в E, но ограниченного по метрике d. [См. упражнение 2.]

4) Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным метризуемым топологическим телом K. Показать, что если E — бэровское пространство и в E существует счетная фундаментальиая система ограниченных множеств (упражнение 1), то в E существует ограниченная окрестность нуля. [См. упражнение 6.]

5) Пусть E — метризуемое векторное пространство над недискретным нормированным телом K. Показать, что для любой последовательности (B_n) ограниченных множеств в E (упражнение 1) существует последовательность (λ_n) ненулевых скаляров такая, что объединение множеств $\lambda_n B_n$ ограниченно.

6) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом строго возрастающей последовательности (E_n) своих замкнутых векторных подпространств.

а) Показать, что E неметризуемо. [Использовать предложение 6 и упражнение 5.]

б) Для того чтобы в E существовала счетная фундаментальная система ограниченных множеств, необходимо и достаточно, чтобы в каждом из E_n существовала счетная фундаментальная система ограниченных множеств.

7) Показать, что в произведении бесконечного числа топологических векторных пространств (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), не сводящихся к одному элементу 0, нет счетной фундаментальной системы ограниченных множеств. [Свести доказательство к случаю пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ и использовать упражнение 4.]

*8) Пусть E — векторное пространство правильных функций на интервале $I = [0, 1]$ (Функц. вещ. перем., гл. II, § 1, n° 3). Пусть V_n для каждого целого $n > 0$ — множество всех функций $f \in E$ таких, что $\int_0^1 \sqrt{|f(t)|}\, dt \leqslant \frac{1}{n}$. Показать, что множества V_n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для метризуемой топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E, и что в этой топологии множества V_n ограиичены, однако выпуклой оболочкой каждого V_n служит всё пространство E. [Принять во внимание, что каждую функцию $f \in E$ можно записать в виде $f = \frac{1}{2}(g + h)$, где g и h принадлежат E и $\int_0^1 \sqrt{|g(t)|}\, dt = \int_0^1 \sqrt{|h(t)|}\, dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{|f(t)|}\, dt.$] Вывести отсюда, что единственной локально выпуклой топологией, мажорируемой топологией пространства E, является слабейшая топология в E.

9) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — бесконечное семейство отделимых топологических векторных пространств, не сводящихся к одному элементу 0, над неднискретным топологическим телом K, E — прямая сумма векторных пространств E_ι и $\mathfrak{T}_0$ — топология в E, определенная в упражнении 7 § 1 гл. I. Для того чтобы множество $B \subset E$ было ограниченным в топологии $\mathfrak{T}_0$, необходимо и достаточно, чтобы B содержалось в подпространстве вида $\prod_{\iota \in H} E_\iota$, где H — некоторое *конечное* подмножество из I, и проекции B на все эти E_ι ($\iota \in H$) были ограниченны. Вывести отсюда, что если каждое E_ι есть квазиполное пространство, то E (наделенное топологией $\mathfrak{T}_0$) квазиполно.

10) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство отделимых локально выпуклых пространств и E — его топологическая прямая сумма (гл. II, § 2, n° 3). Для того чтобы множество $B \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в подпространстве вида $\prod_{\iota \in H} E_\iota$, где H — некоторое *конечное* подмножество из I, и проекции B на все эти E_ι ($\iota \in H$) были ограниченны. [Использовать упражнение 9.] Вывести отсюда, что если каждое E_ι есть квазиполное пространство, то E квазиполно.

11) Пусть E — топологическое векторное пространство над недискретным нормированным телом K.

а) Для того чтобы уравновешенное множество $A \subset E$ поглощало все ограниченные множества из E, достаточно, чтобы A поглощало множество точек любой последовательности (x_n), стремящейся в E к нулю.

б) Пусть u — линейное отображение пространства E в топологическое векторное пространство F над K. Для того чтобы образ любого ограниченного множества из E при отображении u был ограничен в F, достаточно, чтобы последовательность $(u(x_n))$ была ограниченна в F для любой стремящейся к нулю последовательности (x_n) точек из E.

12) Локально выпуклое пространство E называется *ограниченно замкнутым* (соотв. *инфрабочечным*), если каждое выпуклое множество (соотв. каждая бочка) из E, поглощающее все ограниченные множества, есть окрестность нуля в E.

а) Показать, что каждое ограниченно замкнутое пространство и каждое бочечное пространство инфрабочечно *).

---

*) Можно привести примеры бочечных пространств, не являющихся ограниченно замкнутыми (см. L. Nachbin, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40** (1954), 471—474, и T. Shirota, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 294—298).

б) Для того чтобы локально выпуклое пространство E было ограниченно замкнутым, достаточно, чтобы в нем каждое уравновешенное выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества, было окрестностью нуля; достаточно также, чтобы каждая полунорма на E, ограниченная на всех ограниченных множествах, была непрерывна.

в) Показать, что пополнение инфрабочечного пространства бочечно. [См. § 3, лемма 1.]

13) Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mathfrak{T}$ — его топология. Среди локально выпуклых топологий в E, обладающих тем же запасом ограниченных множеств, что и $\mathfrak{T}$, имеется топология $\mathfrak{T}'$, мажорирующая все остальные, и это — единственная из указанных топологий, в которых E ограниченно замкнуто. Пространство, получаемое путем наделения E топологией $\mathfrak{T}'$, называется ограниченно замкнутым пространством, *ассоциированным* с E. Для того чтобы линейное отображение u пространства E в локально выпуклое пространство F переводило каждое ограниченное множество из E в ограниченное множество в F, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно в топологии $\mathfrak{T}'$.

14) а) Пусть M — некоторое множество линейных отображений ограниченно замкнутого пространства E в локально выпуклое пространство F. Для того чтобы M было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любой стремящейся к нулю последовательности (x_n) точек из E множество точек $u(x_n)$ $(u \in M,\ n \in \mathbf{N})$ было ограниченно в F. [См. упражнение 11.]

б) Для того чтобы локально выпуклое пространство F было ограниченно замкнутым, достаточно, чтобы каждое его линейное отображение в банаховское пространство F, переводящее всякую стремящуюся к нулю последовательность из E в ограниченную последовательность в F, было непрерывно. [Рассмотреть ограниченно замкнутое пространство E_0, ассоциированное с E (упражнение 13), и погрузить отделимое пространство, ассоцинрованное с E_0, в произведение банаховских пространств.]

15) Пусть E — метризуемое векторное пространство над недискретным нормированным телом K. Показать, что каждое уравновешенное множество из E, поглощающее все последовательности, стремящиеся к нулю, есть окрестность нуля в E. Вывести отсюда, что непрерывное линейное отображение пространства E в топологическое векторное пространство над K, переводящее каждую стремящуюся к нулю последовательность из E в ограниченную последовательность в F, непрерывно на E.

В частности, каждое локальио выпуклое пространство, топология которого может быть определена *счетным* семейством полунорм, ограниченно замкнуто.

16) Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над недискретным нормированным телом K и F — метризуемое

векторное пространство над K. Показать, что непрерывное линейное отображение u пространства E в F, такое что $u^{-1}(B)$ ограниченно в E для любого ограниченного множества B из F, есть изоморфизм E в F.

17) а) Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство ограниченно замкнутых (соотв. инфрабочечных) пространств и f_ι, для каждого $\iota\in I$, — линейное отображение пространства F_ι в векторное пространство E. Показать, что E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой непрерывны все f_ι (гл. II, § 2, п° 2), ограниченно замкнуто (соотв. инфрабочечно). В частности, каждое факторпространство ограниченно замкнутого (соотв. инфрабочечного) пространства ограниченно замкнуто (соотв. инфрабочечно) *); топологическая прямая сумма ограниченно замкнутых (соотв. инфрабочечных) пространств ограниченно замкнута (соотв. инфрабочечна). Векторное пространство, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, ограниченно замкнуто.

б) Пусть E — локально выпуклое пространство и E_B, для каждого уравновешенного ограниченного выпуклого множества B из E, — векторное подпространство в E, порожденное множеством B и наделенное топологией, для которой множества λB ($\lambda\neq 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (и которую можно определить одной нормой). Пусть f_B — каноническое вложение E_B в E. Показать, что сильнейшая локально выпуклая топология в E, при которой непрерывны все f_B, есть ограниченно замкнутая топология, ассоциированная с топологией пространства E (упражнение 13).

*18) Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — бесконечное семейство локально выпуклых пространств, не сводящихся к одному элементу 0.

а) Пусть f — линейное отображение произведения $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ в банаховское пространство F. Показать, что если образ каждого ограниченного множества из E при отображении f есть ограниченное множество в F, то существует конечное подмножество H в I такое, что сужение f на E_ι (рассматриваемое как подпространство в E) равно нулю для каждого $\iota\notin H$. [В предположении, что утверждение неверно построить ограниченную последовательность (x_n) в E, образ которой при отображении f не ограничен в F.]

б) Пусть каждое из пространств E_ι ограниченно замкнуто. Показать, что если, кроме того, произведение $\mathbf{R}^I$ ограниченно замкнуто, то произведение $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ ограниченно замкнуто. [Используя признак упражнения 14б и а), свести к доказательству того, что если отображение f пространства E в банаховское пространство F переводит

*) Можно привести примеры подпространств ограниченно замкнутого пространства, не являющихся инфрабочечными (гл. IV, § 5, упражнение 21).

каждое ограниченное множество в ограниченное множество и равно нулю на каждом E_ι, то f равно нулю на E; для этого рассмотреть, для каждого $x = (x_\iota)$, сужение f на произведение прямых $\mathbf{R}x_\iota$.]

в) Вывести из б), что произведение любой последовательности (E_n) ограниченно замкнутых пространств ограниченно замкнуто *).

19) Пусть I — несчетное множество. Рассмотрим в векторном пространстве $E = \mathbf{R}^{(I)}$, с одной стороны, сильнейшую локально выпуклую топологию $\mathfrak{T}$, а с другой — топологию $\mathfrak{T}_0$, определенную в упражнении 7 § 1 гл. I. Как известно, топологии $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}_0$ различны (см. гл. II, § 2, упражнение 7). Показать, что ограниченные множества в обеих топологиях — одни и те же (см. упражнения 9 и 10) и что E, наделенное топологией $\mathfrak{T}_0$, не является инфрабочечным. [Использовать упражнение 12в, а также упражнение 5 § 1.]

20) Показать, что если топология метризуемого локально выпуклого пространства E не может быть определена одной нормой, то в E не существует счетной фундаментальной системы ограниченных множеств. [Используя упражнение 5, показать, что в противном случае в E существовало бы ограниченное множество, поглощающее все ограниченные множества из E, и в заключение воспользоваться упражнением 15.]

21) Локально выпуклое пространство E называется *относительно ограниченным*, если в E существует ограниченная бочка.

а) Для того чтобы E было относительно ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы топология в E мажорировалась топологией, определяемой одной нормой. Тогда в E существует фундаментальная система ограниченных множеств, состоящая из бочек.

б) Для того чтобы пространство E было ограниченно замкнутым и относительно ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы его топология была нижней гранью семейства нормированных топологий в E. [См. упражнение 17б.] Для того чтобы в E существовала, кроме того, счетная фундаментальная система ограниченных множеств, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E была нижней гранью счетного семейства нормированных топологий.

22) Пусть K — компактное выпуклое множество и B — замкнутое ограниченное выпуклое множество в отделимом топологическом векторном пространстве E. Показать, что выпуклая оболочка C объединения $K \cup B$ замкнута. [Рассмотреть точку прикосновения z множества C, не принадлежащую K, и свести рассмотрение к случаю $z = 0$; принять во внимание, что существуют окрестность нуля V и число $\alpha_0 < 1$ такие, что из $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in K$, $y \in B$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in V$ следует $\lambda \leqslant \alpha_0$; затем для каждой окрестности нуля W рассмотреть множество троек (λ, x, y) таких, что $\lambda x + (1-\lambda) y \in W$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in K$, $y \in B$.]

*) Неизвестно, является ли произведение $\mathbf{R}^I$ ограниченно замкнутым для произвольного несчетного множества I.

23) Пусть e_n в банаховском пространстве $L^1(\mathbf{N})$ — последовательность $(\delta_{mn})_{m\in\mathbf{N}}$, где $\delta_{mn}=0$ при $m\neq n$ и $\delta_{nn}=1$. Определить непрерывное отображение $L^1(\mathbf{N})$ в $\mathbf{R}$, переводящее ограниченную последовательность элементов e_n в неограниченное множество в $\mathbf{R}$. [Использовать теорему Урысона ([18]).]

§ 3. Пространства непрерывных линейных отображений

1. *Пространства* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$

Пусть E — произвольное множество, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств и F — коммутативная топологическая группа в аддитивной записи. Множество F^E всех отображений E в F обладает структурой коммутативной группы — произведением структур групп его составляющих. Покажем, что топология равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$ (Общ. топ., Рез., § 13, n° 1; гл. X, § 1, n° 2), которую мы будем называть *$\mathfrak{S}$-топологией в F^E, согласуется с этой структурой группы* в F^E. Действительно, пусть $\mathbf{T}_0(M, V)$ для каждого множества $M\in\mathfrak{S}$ и каждой окрестности нуля V в F — множество всех $u\in F^E$ таких, что $u(M)\subset V$. Из определений непосредственно следует, что для каждого $u_0\in F^E$ пересечения всевозможных конечных наборов множеств вида $u_0+\mathbf{T}_0(M, V)$ образуют фундаментальную систему окрестностей u_0 в $\mathfrak{S}$-топологии. Кроме того, ясно, что если W — симметричная окрестность нуля в F такая, что $W+W\subset V$, то $\mathbf{T}_0(M, W)$ симметрично и $\mathbf{T}_0(M, W)+\mathbf{T}_0(M, W)\subset\mathbf{T}_0(M, V)$, чем наше утверждение и доказано. (Общ. топ., Рез., § 10, n° 2; гл. III, § 1, n° 2).

Замечания. 1) Заметим, что равномерная структура в F^E, индуцированная $\mathfrak{S}$-топологией, рассматриваемой как топология группы (Общ. топ., Рез., § 10, n° 11; гл. III, § 3, n° 1), совпадает со структурой равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$.

2) Если V замкнуто в F, то множество $\mathbf{T}_0(M, V)$ замкнуто в топологии простой сходимости. Действительно, если $u_0\in F^E$ есть точка прикосновеиия множества $\mathbf{T}_0(M, V)$ в топологии простой сходимости, то $u_0(x)$ для каждого $x\in M$ есть точка прикосновения объединения множеств $u(M)$, где u пробегает $\mathbf{T}_0(M, V)$; следовательно, $u_0(x)$, по определению множества $\mathbf{T}_0(M, V)$, есть точка прикосновения для V, откуда $u_0(M)\subset V$, т. е. $u_0\in\mathbf{T}_0(M, V)$.

Если F — топологическое векторное пространство, то F^E обладает структурой векторного пространства — произведением структур векторных пространств его составляющих.

Предложение 1. *Пусть E — множество, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств, F — топологическое векторное пространство и H — векторное подпространство в F^E. Для того чтобы $\mathfrak{S}$-топология согласовалась со структурой векторного пространства в H, необходимо и достаточно, чтобы $u(M)$ для любой функции $u \in H$ и любого множества $M \in \mathfrak{S}$ было ограниченным в F. Если, кроме того, F локально выпукло, то H, наделенное $\mathfrak{S}$-топологией, локально выпукло.*

В введенных выше обозначениях, $\mathfrak{S}$-топология в H обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, образованной пересечениями конечных наборов множеств вида $H \cap \mathbf{T}_0(M, V)$, где M пробегает $\mathfrak{S}$, а V — множество всех уравновешенных окрестностей нуля в F. Так как $\mathbf{T}_0(M, \lambda V) = \lambda \mathbf{T}_0(M, V)$, то эта система окрестностей инвариантна относительно гомотетий и состоит из уравновешенных множеств. Так как, по сказанному выше, $\mathfrak{S}$-топология согласуется со структурой аддитивной группы в H, то для того, чтобы она согласовалась со структурой векторного пространства в H, необходимо и достаточно, чтобы множества $H \cap \mathbf{T}_0(M, V)$ были *поглощающими* в H (гл. I, § 1, n° 3); но это означает, что для каждого $u \in H$, каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ и каждой уравновешенной окрестности нуля V в F существует $\lambda > 0$ такое, что $u(M) \subset \lambda V$, т. е. (§ 2, n° 1) что $u(M)$ ограниченно в F. Наконец, справедливость последнего утверждения предложения вытекает из того, что выпуклость V влечет выпуклость $\mathbf{T}_0(M, V)$.

Следствие. *Пусть E и F — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество ограниченных подмножеств пространства E и $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F. $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ согласуется тогда со структурой векторного пространства и притом локально выпукла, если F локально выпукло.*

Достаточно заметить, что $u(M)$, где u — непрерывное линейное отображение E в F, ограниченно в F для каждого ограниченного множества $M \subset E$ (§ 2, n° 3, следствие 2 предложения 5).

Пусть E и F — топологические пространства и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество ограниченных подмножеств пространства E. Через $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ мы будем обозначать топологическое векторное пространство, получаемое путем наделения векторного пространства $L(E, F)$ $\mathfrak{S}$-топо-

логией, и для каждого $M \in \mathfrak{S}$ и каждой окрестности нуля V в F положим

$$\mathbf{T}(M, V) = L(E, F) \cap \mathbf{T}_0(M, V)$$

(см. гл. IV, § 2, упражнение 1).

Наиболее важны следующие случаи:

1) $\mathfrak{S}$ есть множество всех *конечных* подмножеств пространства E; $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ есть тогда топология *простой сходимости*.

2) $\mathfrak{S}$ есть множество всех *компактных* подмножеств пространства E; $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ есть тогда топология *компактной сходимости*.

3) $\mathfrak{S}$ есть множество *всех* ограниченных подмножеств пространства E; $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ называется тогда *топологией ограниченной сходимости*. Ясно, что это — *сильнейшая* из $\mathfrak{S}$-топологий в $L(E, F)$ (поскольку все $\mathfrak{S}$ образованы ограниченными множествами).

Заметим, что $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ не изменяется при замене $\mathfrak{S}$ любым из следующих множеств подмножеств: 1) множеством всех подмножеств множеств из $\mathfrak{S}$; 2) множеством объединений любых конечных наборов множеств из $\mathfrak{S}$; 3) множеством образов множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях; 4) множеством всевозможных конечных сумм $M_1 + M_2 + \ldots + M_p$ множеств из $\mathfrak{S}$; 5) множеством уравновешенных оболочек всех множеств из $\mathfrak{S}$; 6) множеством замыканий всех множеств из $\mathfrak{S}$; 7) при локальной выпуклости пространств E и F — множеством замкнутых уравновешенных выпуклых оболочек всех множеств из $\mathfrak{S}$. Мы ограничимся установлением справедливости последних двух утверждений. Если V — замкнутая окрестность нуля в F, то при $u \in L(E, F)$ из $u(M) \subset V$ следует $u(\overline{M}) \subset \overline{u(M)} \subset V$, поскольку u непрерывно; при этом $\overline{M}$ ограниченно (§ 2, замечание после предложения 2). С другой стороны, если E и F локально выпуклы, то выпуклые оболочки множеств из $\mathfrak{S}$ также ограниченны (§ 2, предложение 2); если V — выпуклая окрестность нуля в F, M — множество из $\mathfrak{S}$ и N — его выпуклая оболочка, то из $u(M) \subset V$, где $u \in L(E, F)$, следует $u(N) \subset V$ (см. упражнение 2).

Предположим, что F локально выпукло, и пусть Γ — множество полунорм, определяющее его топологию (гл. II, § 5, n° 4). Для каждой полунормы $p \in \Gamma$ и каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ положим

$$p_M(u) = \sup_{x \in M} p(u(x)). \tag{1}$$

Ясно, что p_M — полунорма на $L(E, F)$. Кроме того, если V — окрестность нуля в F, определяемая неравенством $p(y) \leqslant 1$, то

включение $u(M) \subset V$ равносильно неравенству $p_M(u) \leqslant 1$; мы видим, таким образом, что $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ определятся семейством полунорм p_M, где p пробегает множество Γ, а M — множество $\mathfrak{S}$ (или лишь его часть $\mathfrak{S}_0$ такую, что каждое множество из $\mathfrak{S}$ содержится в гомотетичном образе некоторого множества из $\mathfrak{S}_0$, — как это следует из равенства $p_{\lambda M}(u) = |\lambda| p_M(u)$).

Если, в частности, E и F — *нормированные* пространства, то топология ограниченной сходимости в $L(E, F)$ определяется *нормой*

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \tag{2}$$

(см. Общ. топ., гл. X, § 2, n° 2). Рассматривая $L(E, F)$ как нормированное пространство, мы всюду, где не оговорено противное, будем предполагать его снабженным нормой (2).

2. Условие отделимости пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$

Предложение 2. *Пусть E и F — топологические векторные пространства, F отделимо и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество ограниченных подмножеств пространства E. Если объединение всех множеств из $\mathfrak{S}$ тотально в E, то пространство $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ отделимо.*

Действительно, пусть A — объединение всех множеств из $\mathfrak{S}$ и $u_0 \in L(E, F)$, $u_0 \neq 0$. Так как A тотально, то существует точка $x_0 \in A$ такая, что $u_0(x_0) \neq 0$, и, следовательно, окрестность нуля V в F такая, что $u_0(x_0) \notin V$; тогда для любого множества $M \in \mathfrak{S}$, содержащего x_0, имеем $u_0 \notin \mathbf{T}(M, V)$, и предложение доказано (см. упражнение 3).

В частности, при отделимости пространства F топологии простой, компактной и ограниченной сходимостей в $L(E, F)$ отделимы.

3. Связи между $L(E, F)$ и $L(\hat{E}, F)$

Пусть E и F — отделимые топологические векторные пространства, причем F *полно*; и пусть $\hat{E}$ — пополнение пространства E. Так как каждое непрерывное линейное отображение u пространства E в F однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $\bar{u}$ пространства $\hat{E}$ в F, то отображение $u \to \bar{u}$ есть изоморфизм структуры векторного пространства в $L(E, F)$ *на* структуру векторного пространства в $L(\hat{E}, F)$. Пусть, далее, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество ограниченных подмножеств пространства E. Из определения

явствует, что при отождествлении $L(E, F)$ с $L(\hat{E}, F)$ посредством отображения $u \to \bar{u}$ $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ *отождествляется* с $\mathfrak{S}$-топологией в $L(\hat{E}, F)$. Обозначая через $\hat{\mathfrak{S}}$ множество замыканий множеств из $\mathfrak{S}$ в $\hat{E}$, заметим, что $\mathfrak{S}$-топология и $\hat{\mathfrak{S}}$-топология в $L(\hat{E}, F)$ совпадают (n° 1).

Например, если E — *нормированное* пространство, то топология ограниченной сходимости в $L(E, F)$ совпадает с топологией ограниченной сходимости в $L(\hat{E}, F)$ (при указанном выше отождествлении пространств $L(E, F)$ и $L(\hat{E}, F)$). Действительно, каждое ограниченное множество из $\hat{E}$ содержится в замыкании (в $\hat{E}$) некоторого ограниченного множества из E. Впрочем, шар $\|x\| \leqslant 1$ в $\hat{E}$ есть замыкание в $\hat{E}$ своего пересечения с E; если поэтому F — *нормированное* пространство, то из формулы (2) следует, что (в принятых выше обозначениях) $\|\bar{u}\| = \|u\|$; иными словами, отображение $u \to \bar{u}$ есть изоморфизм структуры *нормированного* пространства в $L(E, F)$ на структуру нормированного пространства в $L(\hat{E}, F)$.

Можно привести примеры отделимых локально выпуклых пространств E, для которых не всякое ограниченное множество в $\hat{E}$ содержится в замыкании ограниченного множества из E (гл. IV, § 1, упражнение 11).

4. *Ограниченные множества в* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$

Пусть E и F — топологические векторные пространства и $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E. Утверждение, что множество $H \subset L(E, F)$ ограниченно в $\mathfrak{S}$-топологии, означает, что для каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ и каждой окрестности нуля V в F существует $\lambda > 0$ такое, что $H \subset \lambda \mathbf{T}(M, V)$, т. е. $u(M) \subset \lambda V$ для всех $u \in H$, или, иначе, $\bigcup_{u \in H} u(M) \subset \lambda V$, т. е. что множество $\bigcup_{u \in H} u(M)$ *ограниченно* в F для каждого $M \in \mathfrak{S}$.

Так как отношение „$u(M) \subset \lambda V$ для всех $u \in H$“ равносильно отношению $M \subset \lambda \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$, то этот признак выражается также следующим образом:

Предложение 3. *Пусть E и F — топологические векторные пространства и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество ограниченных подмножеств пространства E. Для того чтобы множество*

$H \subset L(E, F)$ было ограниченным в $\mathfrak{S}$-топологии, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности нуля V из F множество $\bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ поглощало все $M \in \mathfrak{S}$.

Если $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — два множества ограниченных подмножеств из E и $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$, то $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ мажорируется $\mathfrak{S}'$-топологией и, следовательно, каждое множество из $L(E, F)$, ограниченное в $\mathfrak{S}'$-топологии, тем более ограниченно в $\mathfrak{S}$-топологии. Мы увидим, что в некоторых важных случаях ограниченность множества $H \subset L(E, F)$ в $\mathfrak{S}$-топологии не зависит от $\mathfrak{S}$, если только ограничиться множествами $\mathfrak{S}$, образующими покрытия пространства E (см. n°7, замечание после следствия 1 теоремы 4).

Теорема 1. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства и $\mathfrak{C}$ — множество всех полных ограниченных уравновешенных выпуклых множеств из E. Каждое множество $H \subset L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, ограниченно в $\mathfrak{C}$-топологии.*

Пусть V — замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в F; в силу предложения 3, дело сводится к доказательству того, что множество $T = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$ поглощает все $M \in \mathfrak{C}$. Ясно, что T — замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество пространства E. Далее, T — *бочка* в E, т. е. (§ 1, определение 1) поглощающее множество; в силу предложения 3, это вытекает из предположения, что H ограниченно в топологии простой сходимости. Тем самым справедливость теоремы вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *В отделимом локально выпуклом пространстве E каждая бочка T поглощает всякое полное ограниченное уравновешенное выпуклое множество A.*

Путем замены пространства E, если нужно, его векторным подпространством, порожденным множеством A, вопрос сводится к тому случаю, когда A порождает E, т. е. когда A — *поглощающее* множество. Пусть тогда p — его калибровочная функция (гл. II, § 5, n°3). Так как для каждого ненулевого $x \in E$ существуют окрестность нуля U, не содержащая x, и число $\alpha > 0$ такое, что $\alpha A \subset U$ (ибо A ограниченно), то $p(x) \neq 0$, иными словами, p — *норма* на E.

Обозначим через E_0 нормированное пространство, получающееся путем наделения E нормой p. Множества λA ($\lambda > 0$) образуют в E_0 фундаментальную систему окрестностей нуля. Так как A ограниченно в E, то топология $\mathfrak{T}_0$ пространства E_0 *мажорирует* топологию $\mathfrak{T}$ пространства E. Далее, E_0 — *банаховское пространство*. Действительно, окрестности нуля λA для топологии $\mathfrak{T}_0$ полны в топологии $\mathfrak{T}$; следовательно, нормированное пространство E_0 полно (гл. I, § 1, следствие предложения 8). Так как теперь T замкнуто в E, то оно замкнуто и в E_0 и, следовательно, является бочкой в E_0. Но E_0 — бочечное пространство (§ 1, предложение 1). Следовательно, T есть крестность нуля в E_0 и, значит, поглощает A.

Следствие 1. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Если E квазиполно, то каждое множество из $L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, ограниченно во всякой $\mathfrak{S}$-топологии.*

Действительно, $\mathfrak{C}$ есть в этом случае множество всех *замкнутых* ограниченных уравновешенных выпуклых подмножеств пространства E, и так как замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка каждого ограниченного множества из E также ограниченна в E (§ 2, предложение 2), то $\mathfrak{C}$-топология есть не что иное, как топология ограниченной сходимости, т. е. сильнейшая из всех $\mathfrak{S}$-топологий.

Если E квазиполно, то мы будем говорить поэтому просто об *ограниченных множествах* в $L(E, F)$, не отмечая — в какой $\mathfrak{S}$-топологии (подразумевая, если не оговорено противное, $\mathfrak{S}$-топологии, порождаемые множествами $\mathfrak{S}$ множеств, содержащими все конечные подмножества пространства E).

Следствие 2. *Пусть E и F — банаховские пространства и H — множество непрерывных линейных отображений E в F. Если $\sup\limits_{u \in H} \|u(x)\| < +\infty$ для каждого $x \in E$, то также $\sup\limits_{u \in H} \|u\| < +\infty$.*

5. Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$

Пусть E и F — топологические векторные пространства. Для того чтобы $H \subset L(E, F)$ было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равностепенно непрерывным в точке 0 (гл. I, § 1, предложение 7); это означает, что для каждой

окрестности нуля V из F существует окрестность нуля U в E такая, что $u(U)\subset V$ для всех $u\in H$, или, иначе, что *множество* $\bigcap_{u\in H} u^{-1}(V)$ *есть окрестность нуля в* E. Как мы знаем (гл. I, § 1, n° 5), тогда H, сверх того, равномерно равностепенно непрерывно. Заметим еще, что если E и F локально выпуклы, то уравновешенная выпуклая оболочка равностепенно непрерывного множества H из $L(E, F)$ равностепенно непрерывна; действительно, если для любой уравновешенной выпуклой окрестности нуля V из F существует окрестность нуля U в E такая, что $u(U)\subset V$ для всех $u\in H$, то и для любой линейной комбинации $v=\sum_k \lambda_k u_k$ элементов из H такой, что $\sum_k |\lambda_k|\leqslant 1$, имеем $v(U)\subset V$.

Предложение 4. *Пусть E и F — топологические векторные пространства, причем F отделимо. Замыкание $\overline{H}$ каждого равностепенно непрерывного множества $H\subset L(E, F)$ в произведении F^E* (пространстве *всех* отображений E в F, наделенном топологией простой сходимости) *содержится в $L(E, F)$ и равностепенно непрерывно.*

Что $\overline{H}$ равностепенно непрерывно — известно (Общ. топ., Рез., § 13, n° 12; гл. X, § 3, предложение 7); остается лишь показать, что предел линейных отображений в топологии простой сходимости линеен. Но отображение $u\to u(x)$ произведения F^E в F непрерывно; поэтому, поскольку F отделимо, для любой пары точек x, y из E и любой пары скаляров λ, μ множество тех $u\in F^E$, которые удовлетворяют соотношению

$$u(\lambda x+\mu y)-\lambda u(x)-\mu u(y)=0,$$

замкнуто в F^E; следовательно, множество всех линейных отображений E в F замкнуто в F^E как пересечение указанных множеств, когда x и y пробегают E, а λ и μ — тело скаляров.

Следствие. *Для того чтобы равностепенно непрерывное множество $H\subset L(E, F)$ было относительно компактным в $L(E, F)$, наделенном топологией простой сходимости, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in E$ множество $H(x)$ значений $u(x)$, где u пробегает H, было относительно компактно в F.*

Действительно, это условие необходимо и достаточно для того, чтобы H было относительно компактным в *произведении* F^E (Общ. топ., Рез., § 8, n° 7; гл. I, § 10, следствие теоремы 3), откуда и вытекает утверждение, поскольку $\overline{H} \subset L(E, F)$.

Предложение 5. *Пусть E и F — отделимые топологические векторные пространства. Следующие равномерные структуры совпадают на каждом равностепенно непрерывном множестве $H \subset L(E, F)$:*

1) *равномерная структура простой сходимости на тотальном множестве из E;*

2) *равномерная структура простой сходимости на E;*

3) *равномерная структура равномерной сходимости на предкомпактных множествах из E.*

Заметим прежде всего, что если u — линейное отображение E в F и V — уравновешенная окрестность нуля в F, то из $u(x_i) \in V$ ($x_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant n$) следует, что $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \in |\lambda_1| V + |\lambda_2| V + \ldots + |\lambda_n| V$ для любого набора скаляров (λ_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Отсюда сразу вытекает, что для каждого множества A из E равномерная структура (в H) простой сходимости на A совпадает с равномерной структурой простой сходимости на векторном подпространстве, порожденном множеством A. Поэтому в утверждении предложения 5 слово „тотальном" можно заменить на „всюду плотном". Совпадение первых двух равномерных структур есть тогда следствие общего свойства равностепенно непрерывных множеств. (Общ. топ., Рез., § 13, n° 15; гл. X, § 3, предложение 3 ([19])). Совпадение же второй и третьей равномерных структур вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть E и F — отделимые равномерные пространства и H — равномерно равностепенно непрерывное множество отображений E в F. Тогда в H равномерная структура простой сходимости на E совпадает с равномерной структурой равномерной сходимости на предкомпактных множествах из E.*

Действительно, пусть V — окружение для равномерной структуры в F и A — предкомпактное множество из E. По предположению, существует симметричное окружение U для равномерной структуры в E такое, что из $(x, y) \in U$ следует $(u(x), u(y)) \in V$ для всех $u \in H$. Так как A предкомпактно, то существует конечное число

точек $x_i \in A$ таких, что окрестности $U(x_i)$ образуют покрытие множества A; если тогда u и v принадлежат H и таковы, что $(u(x_i), v(x_i)) \in V$ для каждого i, то $(u(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in A$, и лемма доказана.

Примеры. °1) Пусть μ — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и E — пространство $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ (Интегрир., гл. IV, § 3). Пусть f_h, для каждой числовой функции f с интегрируемой p-й степенью на $\mathbf{R}$ и каждого вещественного h, — функция $x \to f(x-h)$, очевидно, также обладающая интегрируемой p-й степенью. Ясно, что $f \to f_h$ есть линейное отображение пространства E на себя *); кроме того, так как $N_p(f_h - g_h) = N_p(f-g)$ **), то множество H всех этих линейных отображений (где h пробегает $\mathbf{R}$) *равностепенно непрерывно.* Но для каждой непрерывной функции f с компактным носителем на $\mathbf{R}$ функции f_h при h, стремящемся к нулю, сходятся к f равномерно, а значит, и в среднем порядка p. Так как множество $\mathscr{K}(\mathbf{R})$ всех непрерывных функций с компактным носителем на $\mathbf{R}$ всюду плотно в E, то из предложения 5 следует, что f_h при h, стремящемся к нулю, *сходится в среднем порядка p к f для каждой* функции $f \in E$.

2) Пусть E — пространство всех непрерывных числовых функций на $\mathbf{R}$, наделенное топологией компактной сходимости, и (μ_n) — последовательность мер с компактным носителем на $\mathbf{R}$, т. е. непрерывных линейных отображений E в $\mathbf{R}$ (Интегрир., гл. III, § 3, предложение 11). Предположим, что $\|\mu_n\| \leqslant 1$ для всех n и что носители всех мер μ_n содержатся в фиксированном компактном множестве в $\mathbf{R}$. Если тогда $\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = 0$ для каждой функции $f \in E$, то последовательность интегралов $\int e^{itx}\, d\mu_n(t)$ стремится к нулю *равномерно* (по x) на каждом компактном множестве в $\mathbf{R}$. Действительно, последовательность (μ_n) равностепенно непрерывна, а когда x пробегает компактное множество в $\mathbf{R}$, фуикции $t \to e^{itx}$ образуют компактное множество в E (Общ. топ., Рез., § 13, n° 8; гл. X, § 2, предложение 9 (20)).

Следствие. *Пусть H — равностепенно непрерывное множество в $L(E, F)$. Если фильтр Φ в H сходится на E в топологии простой сходимости к некоторому отображению u_0*

*) Допуская вольность речи, мы отождествляем функцию, обладающую интегрируемой p-й степенью, с ее классом эквивалентности (по модулю множества всех пренебрегаемых функций), или, что то же, отождествляем две такие функции, если они совпадают почти всюду.

**) $N_p(f) = \left(\int_{\mathbf{R}} |f|\, d\mu\right)^{1/p}$. — *Прим. перев.*

пространства E в F, то u_0 — непрерывное линейное отображение E в F и Φ сходится к u_0 равномерно на каждом предкомпактном множестве из E.

Первое утверждение есть следствие предложения 4, а второе — предложения 5.

Предложение 6. *Пусть H — равностепенно непрерывное множество в $L(E, F)$. Если F метризуемо, а в E существует тотальное счетное множество, то равномерная структура в H простой сходимости на E метризуема. Если, кроме того, и в F существует тотальное счетное множество, то H содержит счетное всюду плотное множество* (в топологии простой сходимости на E).

Действительно, пусть (a_n) — тотальная последовательность в E; покажем, что отображение $u \to (u(a_n))$ есть *изоморфизм* H, наделенного равномерной структурой $\mathscr{U}$ простой сходимости на E, в равномерное пространство $F^{\mathbf{N}}$, чем и будет доказано, что $\mathscr{U}$ *метризуема* (Общ. топ., Рез., § 7, n° 9; гл. IX, § 2, упражнение 8 ([21])). Итак, пусть d — расстояние, определяющее равномерную структуру пространства F; если для каждых двух элементов u и v в $L(E, F)$ положить $d_n(u, v) = d(u(a_n), v(a_n))$, то d_n будут отклонениями на $L(E, F)$; в силу предложения 5, они определяют в H равномерную структуру $\mathscr{U}$, чем и установлена справедливость нашего утверждения. Для доказательства второй части предложения мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 3. *Для того чтобы топология метризуемого топологического пространства G обладала счетным базисом, необходимо и достаточно, чтобы G содержало счетное всюду плотное множество.*

Условие необходимо, ибо если (B_n) — базис топологии пространства G и $b_n \in B_n$, то последовательность (b_n) всюду плотна. Обратно, предположим, что в G существует всюду плотная последовательность (a_n), и пусть d — расстояние, определяющее топологию в G, а S_{mn} — открытый шар с центром a_m и радиусом $\frac{1}{n}$. Тогда множества S_{mn} образуют базис топологии в G. Действительно, для каждого открытого множества U из G и каждой точки $x \in U$ существуют целые числа m, n такие, что $d(x, a_m) < \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, где δ —

расстояние от x до $\mathbf{C}U$, а тогда шар S_{mn} содержится в U и содержит x.

Вернемся теперь ко второй части предложения 6. Предположим, что в F существует тотальная последовательность (c_n). Если телом скаляров для F служит $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), то линейные комбинации векторов c_n (соотв. c_n и ic_n) с рациональными коэффициентами образуют всюду плотное счетное множество в F, так что топология в F обладает в силу леммы 3 счетным базисом $\mathfrak{B}$. Непосредственно ясно, что тогда элементарные множества в $F^{\mathbf{N}}$ (Общ. топ., Рез., § 7, n° 5; гл. I, § 8, n° 1), все проекции которых на F принадлежат $\mathfrak{B}$, образуют счетный базис топологии в $F^{\mathbf{N}}$. Отсюда заключаем, что топология в H обладает счетным базисом, что, в силу леммы 3, и завершает доказательство.

6. *Теорема Банаха — Штейнгауза*

Предложение 7. *Пусть E и F — топологические векторные пространства. Каждое равностепенно непрерывное множество в $L(E, F)$ ограниченно во всех $\mathfrak{S}$-топологиях.*

Действительно, какова бы ни была окрестность нуля V из F, $\bigcap_{u\in H} {}^{-1}u\,(V)$ есть окрестность нуля в E и, следовательно, поглощает все ограниченные множества, что, в силу предложения 3, и завершает доказательство.

Множество из $L(E, F)$, ограниченное в топологии ограниченной сходимости (и тем более во всех $\mathfrak{S}$-топологиях), не обязательно равностепенно непрерывно (гл. IV, § 3, упражнение 5). Однако справедливо следующее:

Теорема 2. *Пусть E — бочечное пространство и F — локально выпуклое пространство. Каждое множество $H \subset L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, равностепенно непрерывно.*

Действительно, пусть V — замкнутая уравновешенная выпуклая окрестность нуля в F. Множество $T = \bigcap_{u\in H} {}^{-1}u\,(V)$ замкнуто, уравновешенно и выпукло, предположение же, что H ограниченно в топологии простой сходимости, означает, что T — поглощающее мно-

жество (предложение 3), значит T — бочка в E. А так как E — бочечное пространство, то T — окрестность нуля в E, и теорема доказана.

Следствие (теорема Банаха — Штейнгауза). *Пусть E — бочечное пространство, F — отделимое локально выпуклое пространство и Φ — фильтр в $L(E, F)$, сходящийся на E в топологии простой сходимости к некоторому отображению u_0 пространства E в F. Если Φ содержит множество, ограниченное в топологии простой сходимости* (в этом случае мы говорим, что Φ — *ограниченный* фильтр), *или обладает счетным базисом, то u_0 есть непрерывное линейное отображение E в F и Φ сходится к u_0 равномерно на каждом предкомпактном множестве из E.*

Если Φ содержит множество H, ограниченное в топологии простой сходимости, то утверждение вытекает из следствия предложения 5, поскольку H равностепенно непрерывно (теорема 2).

Далее, если Φ — элементарный фильтр, ассоциированный с некоторой последовательностью $(u_n)_{n\geqslant 1}$ (Общ. топ., Рез., § 2, n° 10; гл. I, § 5, n° 10), то последовательность $(u_n(x))$ для каждого $x\in E$ сходится в F к $u_0(x)$; тогда последовательность (u_n) ограниченна в топологии простой сходимости (§ 2, следствие предложения 3) и мы приходим к предыдущему случаю.

Предположим, наконец, что Φ обладает счетным базисом. Тогда каждый элементарный фильтр Ψ, мажорирующий Φ, сходится на E к u_0 в топологии простой сходимости, так что u_0 есть непрерывное линейное отображение E в F и Ψ сходится к u_0 в топологии равномерной сходимости на предкомпактных множествах из E. Следовательно, то же верно и для фильтра Φ, поскольку последний является пересечением всех мажорирующих его элементарных фильтров (Общ. топ., Рез., § 2, n° 10; гл. I, § 5, предложение 10).

Заметим, что просто сходящийся фильтр из $L(E, F)$, обладающий счетным базисом, не обязательно содержит ограниченное множество, как это показывает пример фильтра окрестностей нуля, когда топология в $L(E, F)$ метризуема, но не может быть определена одной нормой (упражнение 3).

Пример. Пусть E — банаховское пространство (над $\mathbf{C}$), образованное непрерывными комплексными функциями на $\mathbf{R}$, имеющими

период 1, и снабженное нормой $\|f\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$. Для каждого целого $n \in \mathbf{Z}$ и каждой функции $f \in E$ положим $c_n(f) = \int_0^1 f(x)\, e^{2\pi i n x}\, dx$ (n-й *коэффициент Фурье* функции f); каждое из отображений $f \to c_n(f)$ есть непрерывная линейная форма на E. Пусть (α_n) — последовательность комплексных чисел, обладающая тем свойством, что ряд с общим членом $\alpha_n c_n(f)$ ($n \in \mathbf{Z}$) абсолютно сходится для *каждой* функции $f \in E$. При этих условиях отображение $f \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n c_n(f)$ есть непрерывная линейная форма на E; °иными словами, существует *мера* μ на $[0, 1]$ такая, что $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n c_n(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$ для каждой функции $f \in E$.° Действительно, отображение $f \to \sum_{k=-m}^{m} \alpha_k c_k(f)$ для каждого целого $m > 0$ есть непрерывная линейная форма u_m на E, и по предположению последовательность $u_m((f))$ для каждой функции $f \in E$ сходится к $u(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n c_n(f)$; тем самым справедливость утверждения следует из теоремы Банаха — Штейнгауза, поскольку E — бочечное пространство.

Замечание. °Результат последнего примера может быть получен также путем применения теоремы о замкнутом графике (гл. I, § 3, следствие 5 теоремы 1), а именно следующим образом. Пусть v — линейное отображение пространства E в банаховское пространство $F = L^1_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$, относящее каждой функции $f \in E$ последовательность $(\alpha_n c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$. Покажем, что v *непрерывно*, откуда тем более будет следовать непрерывность отображения u. Для этого достаточно показать, что график G отображения v *замкнут* в $E \times F$. Но пусть F_0 — произведение $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$; F (рассматриваемое как векторное пространство, не наделенное топологией) есть подпространство в F_0 и топология, индуцируемая в F из F_0, *мажорируется* нормированной топологией в F. Достаточно поэтому доказать, что G замкнут *в пространстве* $E \times F_0$ или, иначе (поскольку F_0 метризуемо), что $v(f_m)$ стремится к нулю в F для каждой стремящейся к нулю последовательности (f_m) из E. Но это означает, что последовательность $(\alpha_n c_n(f_m))_{m \in \mathbf{N}}$ сходится к нулю для каждого n, а последнее очевидно.°

Теорема 3. *Пусть T — метризуемое топологическое пространство, E — метризуемое бочечное пространство, F — локально выпуклое пространство и M — множество отображений*

произведения $E \times T$ в F, удовлетворяющее следующим условиям:

1° *для каждого $t_0 \in T$ множество отображений $x \to f(x, t_0)$ $(f \in M)$ есть равностепенно непрерывное множество линейных отображений E в F;*

2° *для каждого $x_0 \in E$ множество отображений $t \to f(x_0, t)$ $(f \in M)$ пространства T в F равностепенно непрерывно.*

При этих условиях множество M равностепенно непрерывно.

Мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 4. *Пусть H — множество отображений метризуемого пространства A в равномерное пространство B. Для того чтобы H было равностепенно непрерывным, достаточно, чтобы для каждой последовательноста (z_n) из A, сходящейся к любому пределу a, последовательность $(f(z_n))$ сходилась к $f(a)$ равномерно относительно $f \in H$.*

В самом деле, при этих условиях для каждого $a \in A$ и каждого окружения U для равномерной структуры пространства B множество V точек $z \in A$ таких, что $(f(z), f(a)) \in U$ для каждой функции $f \in H$, есть окрестность точки a в A. Действительно, если бы это было не так, то в $\mathbf{C}V$ существовала бы последовательность (z_n), сходящаяся к a, а тогда последовательность $(f(z_n))$ не сходилась бы к $f(a)$ равномерно относительно $f \in H$.

Для доказательства теоремы 3 достаточно теперь, в силу метризуемости произведения $E \times T$, показать, что для каждой последовательности $((x_n, t_n))_{n \geqslant 1}$ точек этого произведения, сходящейся к пределу (x_0, t_0), $f(x_n, t_n)$ сходится к $f(x_0, t_0)$ равномерно относительно $f \in M$. Пусть f_t для каждой функции $f \in M$ и каждой точки $t \in T$ — частичное отображение $x \to f(x, t)$, по условию принадлежащее $L(E, F)$. Покажем, что множество линейных отображений $f_{t_n} - f_{t_0}$, где f пробегает M, а n — множество целых чисел $\geqslant 1$, *ограниченно в топологии простой сходимости* в $L(E, F)$, т. е. что для каждого $x \in E$ множество N_x точек $f(x, t_n) - f(x, t_0)$ $(n \geqslant 1,\ f \in M)$ *ограниченно* в F.

Пусть V — уравновешенная окрестность нуля в F; из предположения 2° теоремы следует существование номера n_0 такого, что $f(x, t_n) - f(x, t_0) \in V$ для каждой функции $f \in M$ и всех $n \geqslant n_0$; с другой стороны, в силу предположения 1° и предложения 7, множество точек $f(x, t) = f_t(x)$ $(f \in M)$ ограниченно в F для каж-

дого $t \in T$; поэтому множество точек $f(x, t_n) - f(x, t_0)$ $(f \in M)$ ограниченно в F для каждого номера $n < n_0$ (§ 2, следствие 5 предложения 5) и, значит, существует $\lambda \geqslant 1$ такое, что $f(x, t_n) - f(x, t_0) \in \lambda V$ для $n < n_0$ и всех $f \in M$. Следовательно, $N_x \subset \lambda V$, т. е. N_x ограниченно.

Так как E бочечно, то множество линейных отображений $f_{t_n} - f_{t_0}$ равностепенно непрерывно (теорема 2); но в силу предположения 1°, множество отображений f_{t_0} $(f \in M)$ тоже равностепенно непрерывно; следовательно, и множество отображений f_{t_n} $(n \geqslant 1,\ f \in M)$ равностепенно непрерывно. Это означает, что для каждой окрестности нуля V из F существует окрестность U точки x_0 в E такая, что $f(x, t_n) - f(x_0, t_n) \in V$ для всех $x \in U$, всех целых $n \geqslant 1$ и всех функций $f \in M$. Но если n достаточно велико, то $x_n \in U$ и значит $f(x_n, t_n) - f(x_0, t_n) \in V$. С другой стороны, из предположения 2° следует, что для достаточно больших n также $f(x_0, t_n) - f(x_0, t_0) \in V$ при всех $f \in M$. Поэтому существует номер m такой, что $f(x_n, t_n) - f(x_0, t_0) \in V + V$ для всех $n \geqslant m$ и всех функций $f \in M$, чем и доказано, что последовательность $(f(x_n, t_n))$ стремится к $f(x_0, t_0)$ равномерно относительно $f \in M$.

7. *Полные множества в* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$

Теорема 4. *Пусть E и F — топологические векторные пространства и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E, образованное ограниченными множествами. Если F отделимо и квазиполно* (§ 2, n° 5), *то каждое равностепенно непрерывное множество $H \subset L(E, F)$, замкнутое в $\mathfrak{S}$-топологии, есть полное равномерное подпространство равномерного пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.*

Действительно, пусть Φ — фильтр Коши в H (в равномерной структуре, индуцированной из $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$). Множество $H(x)$ точек $u(x)$ $(u \in H)$ ограниченно в F для каждого $x \in E$ (предложение 7), поэтому его замыкание $\overline{H(x)}$, также ограниченное в F, есть полное равномерное подпространство пространства F. Так как образ $\Phi(x)$ фильтра Φ при отображении $u \to u(x)$ есть базис фильтра Коши в $H(x)$ (поскольку $\mathfrak{S}$ покрывает E), то мы видим, что $\Phi(x)$ сходится к некоторой точке $u_0(x) \in F$. Другими словами, Φ просто сходится к некоторому отображению u_0 пространства E в F. Так как H равностепенно непрерывно, то u_0 есть непрерывное линейное отображение E в F (следствие предложения 5). Будучи фильтром

Коши в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$, Φ сходится к u_0 в $\mathfrak{S}$-топологии (Общ. топ., Рез., § 13, n° 3; гл. X, § 1, предложение 4 ([22])), и теорема доказана.

Замечание. Пусть M — *полное* равномерное подпространство в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$. Каково бы ни было семейство ограниченных множеств $\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}$ в E, $\mathfrak{S}'$-топология в $L(E, F)$ мажорирует $\mathfrak{S}$-топологию; с другой стороны, существует фундаментальная система окрестностей нуля для $\mathfrak{S}'$-топологии, замкнутых в топологии простой сходимости (n° 1, замечание 2) и, значит, тем более в $\mathfrak{S}$-топологии. Отсюда следует (гл. I, § 1, предложение 8), что M остается полным и в равномерной структуре, индуцированной из $L_{\mathfrak{S}'}(E, F)$.

Следствие 1. *Пусть E и F — топологические векторные пространства и H — равностепенно непрерывное множество из $L(E, F)$. Если F отделимо и квазиполно и фильтр Φ в H просто сходится во всех точках некоторого тотального множества $S \subset E$ к отображению u_0 последнего в F, то u_0 однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $\overline{u}_0$ пространства E в F и Φ сходится к $\overline{u}_0$ равномерно на каждом предкомпактном множестве из E.*

Действительно, в силу предложения 5, Φ есть фильтр Коши для равномерной структуры простой сходимости на E; поэтому, в силу теоремы 4 и предложения 4, он просто сходится на E к некоторому отображению $\overline{u}_0 \in \overline{H}$ (где $\overline{H}$ — замыкание H в $L(E, F)$ в топологии простой сходимости); последнее утверждение вытекает из предложения 5.

Замечание. Пусть (u_n) — последовательность непрерывных линейных отображений банаховского пространства E в банаховское пространство F; может случиться, что $(u_n(x))$ имеет предел в каждой точке некоторого векторного подпространства S, всюду плотного в E, и, однако, последовательность (u_n) не ограниченна. Пусть, например, E — пространство всех непрерывных числовых функций $f(x)$ на $\mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, снабженное нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$, и S — его подпространство, образованное всеми непрерывными чнсловыми функциями на $\mathbf{R}$ с компактным носителем. Последовательность непрерывных линейных отображений $f \to nf(n)$ пространства E в $\mathbf{R}$ стремится к нулю для всех $f \in S$, но не ограниченна в $L(E, \mathbf{R})$. Тот же пример показывает, что в пространстве $L(S, \mathbf{R})$ последовательность (v_n) может быть сходящейся в топологии простой сходимости и, однако, не ограниченной в топологии ограниченной сходимости.

Следствие 2. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E, образованное ограниченными множествами. Если E бочечно, а F отделимо и квазиполно, то пространство $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ отделимо и квазиполно.*

Действительно, замкнутое ограниченное множество в $L(E, F)$ ограниченно в топологии простой сходимости (поскольку $\mathfrak{S}$ покрывает E), а потому равностепенно непрерывно (теорема 2) и, следовательно, в силу теоремы 4, есть полное равномерное подпространство в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

Замечание. В обозначениях предыдущего замечания, последовательность непрерывных линейных отображений $f \to \sum_{k=1}^{n} f(k)$ является последовательностью Коши в $L(S, \mathbf{R})$ в топологии простой сходимости, но не имеет в этой топологии предела в $L(S, \mathbf{R})$.

Следствие 3. *Пусть E и F — банаховские пространства. $L(E, F)$, наделенное топологией ограниченной сходимости, есть банаховское пространство* (ср. Общ. топ., гл. X, § 2, предложение 4).

Действительно, как мы знаем, $L(E, F)$ в этой топологии нормированно (n° 1); с другой стороны, так как E бочечно (§ 1, следствие предложения 1), а F квазиполно, то $L(E, F)$ квазиполно; следовательно, $L(E, F)$ полно (§ 2, n° 5).

Упражнения. 1) Пусть E — отделимое топологическое пространство и F — топологическое векторное пространство. Показать, что в пространстве $\mathcal{C}(E, F)$ всех непрерывных отображений E в F топология компактной сходимости согласуется со структурой векторного пространства.

2) Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Множество $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E называется *насыщенным*, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1° каждое подмножество множества $M \in \mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$; 2° объединение каждого конечного числа множеств из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$; 3° образы множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях принадлежат $\mathfrak{S}$; 4° замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка каждого множества из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

а) Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное множество ограниченных подмножеств пространства E, $\mathfrak{S}_1$ — множество объединений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_2$ — множество замкнутых уравновешенных выпуклых оболочек всех множеств из $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_3$ — миожество образов множеств из $\mathfrak{S}_2$ при всевозможных гомотетиях, наконец

$\overline{\mathfrak{S}}$ — множество всех подмножеств множеств из $\mathfrak{S}_3$. Показать, что $\overline{\mathfrak{S}}$ есть наименьшее насыщенное множество ограниченных подмножеств пространства E, содержащее $\mathfrak{S}$, и что $\overline{\mathfrak{S}}$-топология в $L(E, F)$ совпадает с $\mathfrak{S}$-топологией.

б) Пусть $\mathfrak{S}$ — насыщенное множество ограниченных подмножеств пространств E и $\mathfrak{S}'$ — содержащее $\mathfrak{S}$ множество ограниченных подмножеств из E, отличное от $\mathfrak{S}$. Показать, что $\mathfrak{S}'$-топология в $L(E, F)$ сильнее $\mathfrak{S}$-топологии. [Использовать теорему Хана — Банаха.]

3) Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства и $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E.

а) Показать, что если F не сводится к одному элементу 0, то для отделимости пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ необходимо (и достаточно), чтобы объединение всех множеств нз $\mathfrak{S}$ было тотальио в E. [Использовать теорему Хана — Банаха.]

б) Начиная отсюда, будем предполагать, что $\mathfrak{S}$ покрывает E. Показать, что существует изоморфизм пространства F на замкнутое подпространство пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$. Вывести отсюда, что если $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ квазиполно, то F необходимо квазиполно.

в) Предположим, кроме того, что $\mathfrak{S}$ — насыщенное множество (упражнение 2). Для того чтобы $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы F было метризуемо и существовала последовательность (M_n) множеств из $\mathfrak{S}$ такая, что каждое множество из $\mathfrak{S}$ содержится в одном нз M_n. Для того чтобы $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ могла определяться одной нормой, необходимо и достаточно, чтобы топологию в F можно было бы определить одной нормой и существовало множество $M \in \mathfrak{S}$ такое, что каждое множество из $\mathfrak{S}$ содержится в образе множества M при некоторой гомотетии.

4) Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$). Показать, что для каждого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств из $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$), не сводящегося к $\{0\}$, пространство $L_{\mathfrak{S}}(\mathbf{R}, E)$ (соотв. $L_{\mathfrak{S}}(\mathbf{C}, E)$) канонически изоморфно E. Вывести отсюда, что для каждого целого $n > 0$ и каждого покрытия $\mathfrak{S}$ пространства $\mathbf{R}^n$ (соотв. $\mathbf{C}^n$), образованного ограниченными множествами, пространство $L_{\mathfrak{S}}(\mathbf{R}^n, E)$ (соотв. $L_{\mathfrak{S}}(\mathbf{C}^n, E)$) изоморфно E^n.

5) а) Пусть E_1, E_2, F — топологические векторные пространства, φ — непрерывное линейное отображение E_1 в E_2 и $\mathfrak{S}_1$ (соотв. $\mathfrak{S}_2$) — множество ограниченных подмножеств пространства E_1 (соотв. E_2) такое, что $\varphi(\mathfrak{S}_1) \subset \mathfrak{S}_2$. Показать, что $u \to u \circ \varphi$ есть непрерывное линейное отображение $L_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F)$ в $L_{\mathfrak{S}_1}(E_1, F)$.

б) Пусть E и F — топологические векторные пространства, M — векторное подпространство в E, φ — каноническое отображение E на E/M и $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E. Показать, что отображение $u \to u \circ \varphi$ есть изоморфизм пространства $L(E/M, F)$, наделенного $\varphi(\mathfrak{S})$-топологией, на подпространство про-

странства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$, образованное всеми непрерывными линейными отображениями E в F, аннулирующимися на M.

6) Пусть $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство локально выпуклых пространств, E — векторное пространство (над тем же телом скаляров, что и все E_α) и h_α для каждого $\alpha\in A$ — линейное отображение E_α в E. Наделим E сильнейшей локально выпуклой топологией, в которой непрерывны все h_α (гл. II, § 2, n° 2). Пусть $\mathfrak{S}_\alpha$ для каждого $\alpha\in A$ — множество ограниченных подмножеств пространства E_α и $\mathfrak{S}$ — объединение множеств $h_\alpha(\mathfrak{S}_\alpha)$ ограниченных подмножеств пространства E. Показать что каково бы ни было локально выпуклое пространство F, $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ есть слабейшая топология, в которой непрерывны линейные отображения $u\to u\circ h_\alpha$ пространства $L(E, F)$ в $L_{\mathfrak{S}_\alpha}(E_\alpha, F)$. В частности, если E — топологическая прямая сумма (гл. II, § 2, n° 3) семейства $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ (где каждое E_α рассматривается как подпространство пространства E), то произведение $\prod_{\alpha\in A} L_{\mathfrak{S}_\alpha}(E_\alpha, F)$ канонически изоморфно пространству $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$, где $\mathfrak{S}$ — объединение множеств $\mathfrak{S}_\alpha$ в $\mathfrak{P}(E)$.

7) Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство отделимых локально выпуклых пространств, не сводящихся к одному элементу 0, E — произведение $\prod_{\iota\in I} E_\iota$ и F — нормированное пространство. Показать, что существует канонический изоморфизм пространства $L(E, F)$, наделенного топологией ограниченной сходимости (соотв. простой сходимости, равномерной сходимости на предкомпактных множествах), на топологическую прямую сумму пространств $L(E_\iota, F)$, наделенных каждое топологией ограниченной сходимости (соотв. простой сходимости, равномерной сходимости на предкомпактных множествах). [Принять во внимание, что для каждого непрерывного линейного отображения u пространства E в F существует конечное множество $H\subset I$ такое, что $u^{-1}(0)$ содержит произведение пространств E_ι с индексами $\iota\notin H$.]

8) Пусть E, F_1, F_2 — топологические векторные пространства, ψ — непрерывное линейное отображение F_1 в F_2 и $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E. Показать, что $u\to\psi\circ u$ есть непрерывное линейное отображение $L_{\mathfrak{S}}(F, F_1)$ в $L_{\mathfrak{S}}(E, F_2)$.

9) Пусть E — топологическое векторное пространство, $\mathfrak{S}$ — множество его ограниченных подмножеств, $(G_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических векторных пространств, F — векторное пространство (над тем же телом скаляров, что и пространства E и G_ι) и g_ι для каждого $\iota\in I$ — линейное отображение F в G_ι. Наделим F слабейшей топологией, в которой непрерывны все g_ι. Показать, что $\mathfrak{S}$-топология в $L(E, F)$ есть слабейшая из топологий, в которых непрерывны линейные отображения $u\to g_\iota\circ u$ пространства $L(E, F)$ в пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, G_\iota)$.

В частности, при $F = \prod_{\iota \in I} G_\iota$ произведение $\prod_{\iota \in I} L_{\mathfrak{S}}(E, G_\iota)$ канонически отождествимо с $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

10) Множество A в отделимом топологическом векторном пространстве называется *полуполным*, если каждая последовательность Коши в A сходится в некоторой точке из A.

а) Показать, что в отделимом локально выпуклом пространстве каждое полуполное ограниченное уравновешенное выпуклое множество поглощается всякой бочкой.

б) Показать, что если E — полуполное отделимое локально выпуклое пространство, то каково бы ни было локально выпуклое пространство F, каждое множество из $L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, ограниченно во всякой $\mathfrak{S}$-топологии.

в) Показать, что каждое инфрабочечное пространство (§ 2, упражнение 12), в котором всякое ограниченное замкнутое уравновешенное выпуклое множество полуполно, — бочечно.

*11) Локально выпуклое пространство E называется *ультра ограниченно замкнутым*, если каждое выпуклое множество в E, поглощающее все полуполные (упражнение 10) ограниченные уравновешенные выпуклые множества, есть окрестность нуля в E.

а) Показать, что каждое ультра ограниченно замкнутое пространство одновременно ограниченно замкнуто и бочечно *).

б) Пусть E — локально выпуклое пространство, в котором замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка множества точек всякой последовательности, стремящейся к нулю, полуполна. Показать, что если E ограниченно замкнуто, то оно ультра ограниченно замкнуто; [Использовать упражнение 11 § 2.] В частности, каждое ограниченно замкнутое квазиполное пространство ультра ограниченно замкнуто; еще специальней: каждое пространство Фреше ультра ограниченно замкнуто.

в) Пусть (E_α) — фильтрующееся семейство векторных подпространств векторного пространства E, покрывающее E, далее, в каждом E_α задана локально выпуклая топология $\mathfrak{T}_\alpha$ и $\mathfrak{T}$ — сильнейшая локально выпуклая топология в E, при которой непрерывны канонические вложения всех E_α в E. Предположим, что топология, индуцируемая в E_α топологией $\mathfrak{T}$, совпадает с $\mathfrak{T}_\alpha$ для каждого индекса α. Показать, что если все пространства E_α ультра ограниченно замкнуты, то E, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, ультра ограниченно замкнуто.

г) Показать, что произведение конечного числа ультра ограниченно замкнутых пространств ультра ограниченно замкнуто. Вывести отсюда, что топологическая прямая сумма любого семейства ультра ограниченно замкнутых пространств ультра ограниченно замкнута.

---

*) Неизвестно, существуют ли ограниченно замкнутые бочечные пространства, которые не были бы ультра ограниченно замкнутыми.

д) Показать, что произведение $E = \prod_{n=0}^{\infty} E_n$ бесконечной последовательности ультра ограниченно замкнутых пространств ультра ограниченно замкнуто. [Пусть A — выпуклое множество в E, поглощающее все полуполные ограниченные уравновешенные выпуклые множества из E. Показать, что если бы A не было окрестностью нуля в E, то $\complement A$ содержало бы последовательность (x_n) такую, что первые $n-1$ координаты каждого x_n равны нулю, но $x_n \neq 0$. Заметить далее, что замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка множества точек такой последовательности совпадает с множеством всех точек вида $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$ где $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \leqslant 1$, и что эта оболочка полуполна.]

е) Пусть E — ультра ограниченно замкнутое пространство. Показать, что существуют семейство (F_ι) банаховских пространств и для каждого ι — линейное отображение f_ι пространства F_ι в E такие, что E есть объединение всех $f_\iota(F_\iota)$ и топология в E есть сильнейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывны все f_ι. [Рассуждать как в упражнении 17б § 2.]

12) Пусть E — *полуполное* (упражнение 10) отделимое локально выпуклое пространство и E_0 — ограниченно замкнутое пространство, ассоциированное с E (§ 2, упражнение 13). Показать, что существуют семейство (F_ι) банаховских пространств и для каждого ι — линейное отображение f_ι пространства F_ι в E_0 такие, что E_0 есть объединение всех $f_\iota(F_\iota)$ и топология в E_0 есть сильнейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывны все f_ι. [Использовать упражнение 17б § 2.] В частности, E_0 есть бочечное пространство.

*13) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, F — пространство Фреше, (F_n) — последовательность пространств Фреше, u — непрерывное линейное отображение F в E и u_n, для каждого n, — непрерывное линейное отображение F_n в E, причем $u(F)$ содержится в объединении всех $u_n(F_n)$. Показать, что тогда существует номер n такой, что $u(F) \subset u_n(F_n)$. [Для каждого n рассмотреть замкнутое подпространство H_n в $F \times F_n$, образованное точками (x, y) для которых $u(x) = u_n(y)$; принять во внимание, что его проекцией на F служит множество $u(u_n^{-1}(F_n))$, и использовать упражнение 3 § 3 гл. I.]

б) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, (F_n) — последовательность пространств Фреше, u_n, для каждого n, — непрерывное отображение F_n в E и A — полное уравновешенное выпуклое ограниченное множество из E, содержащееся в объединении подпространств $u_n(F_n)$. Показать, что существует номер n такой, что $A \subset u_n(F_n)$. [Применить а) к подпространству F пространства E, порожденному множеством A и наделенному топологией, определяемой нормой p, равной калибровочной функции этого множества.]

в) Пусть E — пространство Фреше, (F_n) — последовательность пространств Фреше, F — векторное пространство (над тем же телом скаляров, что и пространства E и F_n) и g_n, для каждого n, — линейное отображение F_n в F, причем F есть объединение подпространств $g_n(F_n)$. Наделим F сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой функции g_n непрерывны, и пусть f — линейное отображение E в F. Показать, что если его график G замкнут в $E \times F$, то f непрерывно. [Свести к тому случаю, когда все F_n — подпространства в F, а g_n — канонические отображения F_n в F; G есть объединение векторных подпространств $G \cap (E \times F_n)$; рассматривая $H_n = G \cap (E \times F_n)$ как подпространство пространства Фреше $E \times F_n$, применить а) к последовательности (H_n), проекциям H_n на E и тождественному отображению E на себя; наконец, воспользоваться теоремой о замкнутом графике (гл. I, § 3, следствие 5 теоремы 1).]

г) Распространить результат из в) на случай пространства E, определенного следующим образом: существуют семейство (E_ι) банаховских пространств и для каждого ι — линейное отображение h_ι пространства E_ι в E; далее, E есть объединение подпространств $h_\iota(E_\iota)$, а топология в E — сильнейшая локально выпуклая топология, при которой непрерывны все h_ι. [Свести к тому случаю, когда E есть банаховское пространство.] Случай ультра ограниченно замкнутого E (упражнение 11).

Вывести отсюда, что каждое непрерывное линейное отображение F *на* E есть гомоморфизм.

14) Пусть E и F — отделимые топологические векторные пространства и H — равностепенно непрерывное множество из $L(E, F)$. Показать, что если в E существует счетное всюду плотное множество и каждое ограниченное множество в F метризуемо, то H метризуемо в топологии простой сходимости на E. Если, кроме того, каждое ограниченное множество в F содержит счетное всюду плотное подмножество, то и H содержит счетное всюду плотное подмножество (в топологии простой сходимости на E).

15) Пусть E и F — топологические векторные пространства, причем E — бэровское.

а) Показать, что каждое множество H в $L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, равностепенно непрерывно. [Рассмотреть для каждой замкнутой окрестности нуля V из F множества $M_n = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(nV)$.]

б) Показать, что если множество H из $L(E, F)$ не равностепенно непрерывно, то множество тех $x \in E$, для которых $H(x)$ не ограниченно в F, имеет своим дополнением множество первой категории. Вывести отсюда, что для каждой последовательности (H_n) не равностепенно непрерывных множеств из $L(E, F)$ существует $x \in E$ такое, что ни одно из множеств $H_n(x)$ не ограниченно в F („принцип конденсации особенностей").

*16) Пусть T — метризуемое топологическое пространство, E и F — топологические векторные пространства, из которых E — бэровское, и M — множество отображений $E \times T$ в F, удовлетворяющее условиям 1° и 2° теоремы 3. Показать, что M равностепенно непрерывно. [При данных точке $t_0 \in T$ и замкнутой уравновешенной окрестности нуля V из F пусть d_x для каждого $x \in E$ — верхняя грань радиусов открытых шаров в T с центром t_0, на которых $f(x, t) - f(x, t_0) \in V$ для всех $f \in M$. Показать, что функция $x \to d_x$ полунепрерывна сверху в каждой точке $x_0 \in E$; для этого показать, что если бы для точек x, произвольно близких к x_0, выполнялись неравенства $d_x > \alpha > d_x$, то мы имели бы $f(x_0, t) - f(x_0, t_0) \in V + W$ при $d(t, t_0) \leqslant \alpha$ и $f \in M$ для каждой окрестности нуля W в F. Наконец использовать теорему 2 из Общ. топ., гл. IX, § 5 ([23]).]

17) Пусть E — инфрабочечное пространство (§ 2, упражнение 12) и F — локально выпуклое пространство. Показать, что каждое множество из $L(E, F)$, ограниченное в топологии ограниченной сходимости, равностепенно непрерывно.

18) Пусть E — ограниченно замкнутое пространство (§ 2, упражнение 12) и $\mathfrak{S}$ — множество его ограниченных подмножеств, содержащее все компактные множества. Показать, что если отделимое локально выпуклое пространство F квазиполно (соотв. полно), то и пространство $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ квазиполно (соотв. полно). [Принять во внимание, что линейное отображение u пространства E в F, сужение которого на каждое компактное множество из E непрерывно, непрерывно на E; см. § 2, упражнение 11.]

§ 4. Гипонепрерывные билинейные отображения

1. Раздельно непрерывные билинейные отображения

Пусть E, F, G — топологические векторные пространства. Для каждого билинейного отображения u произведения $E \times F$ в G и каждого $x \in E$ (соотв. каждого $y \in F$) обозначим через $u_x.$ (соотв. $u_{.y}$) линейное отображение $y \to u(x, y)$ пространства F в G (соотв. линейное отображение $x \to u(x, y)$ пространства E в G).

Определение 1. *Билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G называется раздельно непрерывным, если линейное отображение $u_x.$ непрерывно для каждого $x \in E$ и линейное отображение $u_{.y}$ непрерывно для каждого $y \in F$.*

Из этого определения непосредственно вытекает следующее предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для того чтобы билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G было раздельно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $u_{.y}$ для каждого $y \in F$ было непрерывным линейным отображением E в G и чтобы линейное отображение $y \to u_{.y}$ было непрерывным при наделении пространства $L(E, G)$ топологией простой сходимости.*

Раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G не обязательно непрерывно на $E \times F$ (упражнение 4). Однако справедливо следующее важное предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть E — метризуемое бочечное пространство, F — метризуемое векторное пространство и G — локально выпуклое пространство. Тогда каждое раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G непрерывно.*

Действительно, достаточно применить теорему 3 § 3, приняв F за T, G за F и множество, состоящее из одного данного билинейного отображения, за M.

Ниже вводится понятие, промежуточное между понятиями непрерывного и раздельно непрерывного билинейных отображений.

2. Гипонепрерывные билинейные отображения

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть E, F, G — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E и u — раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G. Следующие условия равносильны:*

а) *Для каждой окрестности нуля W из G и каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ существует окрестность нуля V в F такая, что $u(M \times V) \subset W$.*

б) *Образ каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ при отображении $x \to u_{x.}$ есть равностепенно непрерывное множество в $L(E, G)$.*

в) *Отображение $y \to u_{.y}$ пространства F в $L_{\mathfrak{S}}(E, G)$ непрерывно.*

Действительно, в силу определения окрестностей нуля в $L_{\mathfrak{S}}(E, G)$ (§ 3, n° 1), а) выражает непрерывность отображения $y \to u_{.y}$ в точке 0; точно так же а) выражает, что образ M при отображении $x \to u_{x.}$ равностепенно непрерывен в точке 0 (§ 3, n° 5).

Определение 2. *Билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G называется $\mathfrak{S}$-гипонепрерывным, если оно раздельно непрерывно и удовлетворяет одному из трех равносильных условий* а), б), в) *предложения* 3.

Условие в) предложения 3 показывает, что понятие $\mathfrak{S}$-гипонепрерывного билинейного отображения не изменяется при замене $\mathfrak{S}$ любым множеством подмножеств $\mathfrak{S}'$, получаемым из $\mathfrak{S}$ с помощью операций, описанных в n° 1 § 3, поскольку тогда $\mathfrak{S}'$-топология в $L(E, G)$ совпадает с $\mathfrak{S}$-топологией.

Совершенно так же, поменяв лишь в предложении 3 ролями E и F, определим для каждого множества $\mathfrak{T}$ ограниченных подмножеств из F понятие *$\mathfrak{T}$-гипонепрерывного* билинейного отображения. Раздельно непрерывное билинейное отображение u называется *$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывным*, если оно одновременно и $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно и $\mathfrak{T}$-гипонепрерывно.

Каждое *непрерывное* билинейное отображение $E \times F$ в G $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно для любой пары $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ множеств ограниченных подмножеств. Действительно, для любой окрестности нуля W из G существуют окрестность нуля U в E и окрестность нуля V в F такие, что $u(U \times V) \subset W$; так как каждое множество $M \in \mathfrak{S}$ ограниченно, то существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda M \subset U$; а отсюда

$$u(M \times \lambda V) = u(\lambda M \times V) \subset u(U \times V) \subset W.$$

Обратное вообще неверно (упражнение 5).

Предложение 4. *$\mathfrak{S}$-гипонепрерывное билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G непрерывно на $M \times F$ для каждого $M \in \mathfrak{S}$, причем $u(M \times Q)$ ограниченно в G для каждого ограниченного множества Q из F.*

Действительно, пусть W — окрестность нуля в G; по предположению, в F существует окрестность нуля V такая, что $u(M \times V) \subset W$. Так как существует $\lambda > 0$, для которого $\lambda Q \subset V$, то $\lambda u(M \times Q) = u(M \times \lambda Q) \subset W$, чем вторая часть предложения доказана. С другой стороны, пусть (x_0, y_0) — точка из $M \times F$. Для каждой точки $(x, y) \in M \times F$ имеем

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = u(x - x_0, y_0) + u(x, y - y_0).$$

Если, поэтому, $y-y_0 \in V$, то $u(x, y-y_0) \in W$ для каждого $x \in M$. Так как, с другой стороны, u раздельно непрерывно, то в E существует окрестность нуля U такая, что $u(x-x_0, y_0) \in W$, когда $x-x_0 \in U$. Таким образом, из $x-x_0 \in U$, $y-y_0 \in V$ следует $u(x, y)-u(x_0, y_0) \in W+W$, чем доказана и первая часть предложения.

Предложение 5. *($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$)-гипонепрерывное билинейное отображение и произведения $E \times F$ в G равномерно непрерывно на $M \times N$ для любой пары множеств $M \in \mathfrak{S}$, $N \in \mathfrak{T}$.*

Действительно, для каждой окрестности нуля W из G существуют окрестность нуля U в E и окрестность нуля V в F такие, что из $(x_1, y_1) \in M \times N$, $(x_2, y_2) \in M \times N$, $x_1-x_2 \in U$, $y_1-y_2 \in V$ следует, что $u(x_1-x_2, y_2) \in W$ и $u(x_1, y_1-y_2) \in W$, а значит

$$u(x_1, y_1)-u(x_2, y_2)=u(x_1, y_1-y_2)+u(x_1-x_2, y_2) \in W+W,$$

и предложение доказано.

Предложение 6. *Если F — бочечное пространство, то каждое раздельно непрерывное билинейное отображение и произведения $E \times F$ в локально выпуклое пространство G $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно для любого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E.*

Действительно, достаточно (предложение 3) доказать, что образ каждого ограниченного множества M из E при отображении $x \to u_x$. является равностепенно непрерывным множеством в $L(F, G)$. Но в силу предложения 1, этот образ ограничен в $L(F, G)$ в топологии простой сходимости, а так как F бочечно, то каждое множество из $L(F, G)$, ограниченное в топологии простой сходимости, равностепенно непрерывно (§ 3, теорема 2).

3. Продолжение гипонепрерывного билинейного отображения

Предложение 7. *Пусть E, F, G — топологические векторные пространства, причем G отделимо, далее, E_0 (соотв. F_0) — всюду плотное векторное подпространство в E (соотв. F) и u — раздельно непрерывное билинейное отображение $E_0 \times F_0$ в G.*

1° *Если u равно нулю на $E_0 \times F_0$, то $u=0$.*

2° *Пусть* $\mathfrak{S}_0$ *— множество ограниченных подмножеств из* E_0; *если сужение* u *на* $E_0 \times F_0$ $\mathfrak{S}_0$*-гипонепрерывно, то* u $\mathfrak{S}_0$*-гипонепрерывно на* $E \times F$.

1° По предположению, для каждого $x \in E_0$ непрерывное линейное отображение $y \to u(x, y)$ равно нулю на F_0, а значит, и на F; тогда для каждого $y \in F$ непрерывное линейное отображение $x \to u(x, y)$ равно нулю на E_0, а значит, и на E, т. е. $u = 0$.

2° По предположению, для каждой замкнутой окрестности нуля W в G и каждого множества $M \in \mathfrak{S}_0$ существует окрестность нуля V в F_0 такая, что $u(M \times V) \subset W$. Но $\bar{V}$ есть окрестность нуля в F; для каждого $x \in M$ из $u(\{x\} \times V) \subset W$ следует $u(\{x\} \times \bar{V}) \subset W$, поскольку $y \to u(x, y)$ непрерывно и W замкнуто; следовательно, $u(M \times \bar{V}) \subset W$, а это и показывает, что u $\mathfrak{S}_0$-гипонепрерывно на $E \times F$.

Предложение 8. *Пусть* E, F, G *— топологические векторные пространства, причем* G *отделимо и квазиполно, далее,* E_0 (соотв. F_0) *— всюду плотное векторное подпространство в* E (соотв. F) *и* $\mathfrak{S}_0$ (соотв. $\mathfrak{T}_0$) *— множество ограниченных подмножеств из* E_0 (соотв. F_0), *такое что каждая точка пространства* E (соотв. F) *принадлежит замыканию некоторого множества из* $\mathfrak{S}_0$ (соотв. $\mathfrak{T}_0$). *Тогда каждое* ($\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{T}_0$)*-гипонепрерывное билинейное отображение* u *произведения* $E_0 \times F_0$ *в* G *однозначно продолжается до раздельно непрерывного билинейного отображения* $\bar{u}$ *произведения* $E \times F$ *в* G, *причем* $\bar{u}$ ($\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{T}_0$)*-гипонепрерывно.*

Единственность и гипонепрерывность отображения $\bar{u}$ вытекают из предложения 7; остается установить существование $\bar{u}$. Для каждого $y' \in F_0$ непрерывное линейное отображение $x' \to u(x', y')$ подпространства E_0 в G однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $x \to u_1(x, y')$ пространства E в G (§ 2, предложение 8). Непосредственно ясно, что для каждого $x \in E$ отображение $y' \to u_1(x, y')$ подпространства F_0 в G линейно; покажем, что оно непрерывно. По предположению, существует $M \in \mathfrak{S}_0$ такое, что $x \in \bar{M}$. Для каждой замкнутой окрестности нуля W из G, по предположению, существует окрестность нуля V в F_0 такая, что $u(M \times V) \subset W$; отсюда, по непрерывности, $u_1(\bar{M} \times V) \subset W$ и,

в частности, $u_1(x, y') \in W$ для каждого $y' \in V$, чем и установлена справедливость нашего утверждения.

Теперь, линейное отображение $y' \to u_1(x, y')$ однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $y \to \bar{u}(x, y)$ пространства F в G (§ 2, предложение 8). Ясно, что отображение $x \to \bar{u}(x, y)$ для каждого $y \in F$ линейно; покажем, что оно непрерывно, чем доказательство предложения и будет завершено. По предположению, существует $N \in \mathfrak{T}_0$ такое, что $y \in \overline{N}$. Для каждой замкнутой окрестности нуля W из G по предположению существует окрестность нуля U в E_0 такая, что $u(U \times N) \subset W$; отсюда по непрерывности последовательно заключаем, что $u_1(\overline{U} \times N) \subset W$ и, затем, $\bar{u}(\overline{U} \times \overline{N}) \subset W$; тем самым отображение $x \to \bar{u}(x, y)$ непрерывно, поскольку $\overline{U}$ — окрестность нуля в E.

4. *Гипонепрерывность отображения* $(u, v) \to v \circ u$

Предложение 9. *Пусть R, S, T — отделимые топологические векторные пространства и все три пространства $L(R, S)$, $L(S, T)$, $L(R, T)$ наделены топологией простой* (соотв. *компактной, ограниченной*) *сходимости. Тогда билинейное отображение $(u, v) \to v \circ u$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно, где $\mathfrak{T}$ — множество всех равностепенно непрерывных подмножеств из $L(S, T)$, а $\mathfrak{S}$ — множество всех конечных* (соотв. *компактных, ограниченных*) *подмножеств из $L(R, S)$.*

Докажем сначала, что $(u, v) \to v \circ u$ $\mathfrak{T}$-гипонепрерывно. Пусть H — равностепенно непрерывное множество в $L(S, T)$, W — окрестность нуля в T и M — конечное (соотв. компактное, ограниченное) множество из R. Нужно лишь убедиться в том, что в S существует окрестность нуля V такая, что из $u(M) \subset V$ и $v \in H$ следует $v(u(M)) \subset W$. Но для этого достаточно, чтобы $v(V) \subset W$ для каждого $v \in H$, а существование такой окрестности V вытекает из равностепенной непрерывности множества H.

Чтобы убедиться в $\mathfrak{S}$-гипонепрерывности отображения $(v, u) \to v \circ u$, мы установим, что для каждой окрестности нуля W из T, каждого конечного (соотв. компактного, ограниченного) множества $M \subset R$ и каждого конечного (соотв. компактного, ограниченного) множества L из $L(R, S)$ существует конечное (соотв. компактное, ограниченное) множество N в S такое, что из $v(N) \subset W$ и $u \in L$ следует $v(u(M)) \subset W$.

Очевидно, достаточно показать, что можно взять $N = \bigcup_{u \in L} u(M)$, т. е. что это множество N конечно (соотв. компактно, ограниченно) вместе с L и M. Это непосредственно ясно, если L и M конечны или M ограниченно в R, а L — в $L(R, S)$ (в топологии ограниченной сходимости; см. § 3, n° 4). Таким образом остается установить, что если M компактно в R и L компактно в топологии компактной сходимости в $L(R, S)$, то N компактно в S. Пусть u_M — сужение $u \in L$ на M; отображение $u \to u_M$ пространства L в пространство $\mathcal{C}(M, S)$ всех непрерывных отображений M в S, наделенное топологией равномерной сходимости, непрерывно; значит, образ L при этом отображении компактен, и наше утверждение вытекает тогда из непрерывности отображения $(w, x) \to w(x)$ произведения $\mathcal{C}(M, S) \times M$ в S (Общ. топ., Рез., § 13, n° 7; гл. X, § 2, предложение 6).

В двух нижеприводимых следствиях, как и в предложении 9, предполагается, что *все три* пространства $L(R, S)$, $L(S, T)$, $L(R, T)$ наделены топологией простой сходимости, или все три — топологией компактной сходимости, или все три — топологией ограниченной сходимости.

Следствие 1. *Для каждого равностепенно непрерывного множества H из $L(S, T)$ отображение $(u, v) \to v \circ u$ произведения $L(R, S) \times H$ в $L(R, T)$ непрерывно.*

Это сразу следует из предложений 9 и 4.

Следствие 2. *Пусть T локально выпукло и S бочечно. Если последовательность (u_n) в $L(R, S)$ сходится к u, а последовательность (v_n) в $L(S, T)$ — к v, то последовательность $(v_n \circ u_n)$ в $L(R, T)$ сходится к $v \circ u$.*

Действительно, последовательность (v_n), будучи ограниченной в топологии простой сходимости в $L(S, T)$, равностепенно непрерывна, поскольку S бочечно (§ 3, теорема 2), а тогда утверждение вытекает из следствия 1.

5. Равностепенно гипонепрерывные множества билинейных отображений

Пусть E, F, G — топологические векторные пространства. Множество H билинейных отображений $E \times F$ в G называется *раздельно*

равностепенно непрерывным, если множество линейных отображений u_x. ($u \in H$) равностепенно непрерывно для каждого $x \in E$ и множество линейных отображений $u_{\cdot y}$ ($y \in H$) равностепенно непрерывно для каждого $y \in F$. Раздельно равностепенно непрерывное множество H не обязательно равностепенно непрерывно; однако справедливо следующее предложение:

Предложение 10. *Пусть E — метризуемое бочечное пространство, F — метризуемое векторное пространство и G — локально выпуклое пространство. Каждое раздельно равностепенно непрерывное множество билинейных отображений $E \times F$ в G равностепенно непрерывно.*

Это — следствие теоремы 3 § 3, где F принято за T, G за F и H за M.

Предложение 11. *Пусть E, F, G — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E и H — множество раздельно непрерывных билинейных отображений $E \times F$ в G. Следующие условия равносильны:*

а) *Для каждой окрестности нуля W из G и каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ существует окрестность нуля V в F такая, что $u(M \times V) \subset W$ для всех $u \in H$.*

б) *Для каждого множества $M \in \mathfrak{S}$ образ $H \times M$ при отображении $(u, x) \to u_x$. является равностепенно непрерывным множеством в $L(F, G)$.*

в) *Множество отображений $y \to u_{\cdot y}$ ($u \in H$) пространства F в $L_{\mathfrak{S}}(E, G)$ равностепенно непрерывно.*

Доказательство непосредственно вытекает из определений.

Множество H раздельно непрерывных билинейных отображений $E \times F$ в G, удовлетворяющее одному из равносильных условий а), б), в) предложения 11, называется *равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывным*. Таким же образом определяются понятия *равностепенно $\mathfrak{T}$-гипонепрерывного* множества по множеству $\mathfrak{T}$ ограниченных подмножеств пространства F и *равностепенно $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывного* множества. Предоставляем читателю доказательство следующих предложений, обобщающих предложения 4—7.

Предложение 12. *Равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывное множество H билинейных отображений $E \times F$ в G равностепенно непрерывно на $M \times F$ для каждого $M \in \mathfrak{S}$, причем объединение множеств $u(M \times Q)$ ($u \in H$) ограниченно в G для каждого ограниченного множества Q из F.*

Предложение 13. *Равностепенно $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывное множество H билинейных отображений $E \times F$ в G равномерно*

равностепенно непрерывно на $M \times N$ для любой пары множеств $M \in \mathfrak{S}$, $N \in \mathfrak{T}$.

Предложение 14. *Если F — бочечное пространство, то каждое раздельно равностепенно непрерывное множество билинейных отображений произведения $E \times F$ в локально выпуклое пространство G равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно для любого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E.*

Предложение 15. *Пусть E_1, E_2, F — топологические векторные пространства, G_1* (соотв. *G_2) — всюду плотное векторное подпространство в E_1* (соотв. *E_2), $\mathfrak{S}_1$* (соотв. *$\mathfrak{S}_2$) — множество ограниченных подмножеств из G_1* (соотв. *G_2) и H — множество раздельно непрерывных билинейных отображений $E_1 \times E_2$ в F. Если множество сужений на $G_1 \times G_2$ отображений из H равностепенно $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-гипонепрерывно, то и H равностепенно $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-гипонепрерывно.*

Упражнения. 1) Пусть E, F, G — топологические векторные пространства. Показать, что если E — бэровское, а F — метризуемое, то каждое раздельно равностепенно непрерывное множество билинейных отображений $E \times F$ в G равностепенно непрерывно *). [См. § 3, упражнение 16.]

2) Пусть E, F, G — топологические векторные пространства и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E, образованное ограниченными множествами. Показать, что раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G, непрерывное на $M \times F$ для любого $M \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно.

3) а) Пусть E, F, G — отделимые локально выпуклые пространства и u — билинейное отображение $E \times F$ в G. Для существования в E уравновешенной окрестности нуля U такой, что множество отображений $u_{x\cdot} \in L(F, G)$ $(x \in U)$ равностепенно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы u было непрерывно при замене топологии пространства E мажорируемой ею топологией, для которой множества λU образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Показать, что если G нормированное, то это условие удовлетворяется для каждого непрерывного билинейного отображения $E \times F$ в G.

*) Заметим, что этот результат нельзя вывести прямо из предложения 10, поскольку существуют неметризуемые бэровские пространства (§ 1, упражнение 7); точно так же и предложение 10 нельзя вывести из результата упражнения 1, поскольку существуют метризуемые бочечные пространства, не являющиеся бэровскими (гл. V, § 2, упражнение 10). Наконец, в предложении 10 нельзя опустить требование метризуемости пространства F, ибо можно привести примеры раздельно непрерывных, но не непрерывных билинейных форм на $E \times F$, где E метризуемо, а F бочечно (упражнение 5).

б) Примем за E, F и G произведение $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ и за u — непрерывное билинейное отображение $((x_n), (y_n)) \to (x_n y_n)$. Показать, что в E нет никакой окрестности нуля U, для которой бы множество отображений $u_{x.} \in L(F, G)$ $(x \in U)$ было равностепенно непрерывным.

4) Пусть E — прямая сумма $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, наделенная топологией, индуцированной из произведения $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Показать, что билинейная форма $((x_n), (y_n)) \to \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ раздельно непрерывна на $E \times E$, однако ни для какого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E, содержащего хотя бы одно бесконечномерное ограниченное множество, эта билинейная форма не $\mathfrak{S}$-гипонепрерывна.

5) Пусть E — пространство $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, и F — произведение $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$; E — полное ограниченно замкнутое бочечное пространство, F метризуемо и полно. Пусть, далее, $\mathfrak{S}$ (соотв. $\mathfrak{T}$) — множество всех ограниченных подмножеств пространства E (соотв. F). Показать, что билинейная форма $((x_n), (y_n)) \to \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ на $E \times F$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывна, но не непрерывна. [См. гл. IV, § 3, упражнение 2.]

6) Пусть E — локально выпуклое пространство, F — инфрабочечное пространство (§ 2, упражнение 12) и $\mathfrak{T}$ — множество всех ограниченных подмножеств пространства F. Показать, что $\mathfrak{T}$-гипонепрерывное билинейное отображение пространства $E \times F$ в локально выпуклое пространство G $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно для каждого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств из E. [См. § 3, упражнение 17.]

7) Пусть E и F — топологические векторные пространства, f — билинейное отображение $(x, u) \to u(x)$ произведения $E \times L(E, F)$ в F, $\mathfrak{T}$ — топология, согласующаяся со структурой векторного пространства в $L(E, F)$ и мажорирующая топологию простой сходимости, $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств из E, $\mathfrak{T}$ — множество ограниченных подмножеств из $L(E, F)$. Для того чтобы f было $\mathfrak{S}$-гипонепрерывным, необходимо и достаточно, чтобы топология $\mathfrak{T}$ мажорировала $\mathfrak{S}$-топологию в $L(E, F)$; для того чтобы f было $\mathfrak{T}$-гипонепрерывным, необходимо и достаточно, чтобы множества, образующие $\mathfrak{T}$, были равностепенно непрерывны.

8) Пусть E, F, G — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ (соотв. $\mathfrak{T}$) — множество ограниченных подмножеств пространства E (соотв. F) и H — векторное пространство всех $\mathfrak{T}$-гипонепрерывных отображений $E \times F$ в G.

а) Показать, что в H топология равномерной сходимости на всех множествах вида $M \times N$ $(M \in \mathfrak{S}, N \in \mathfrak{T})$ согласуется со структурой векторного пространства; эта топология называется $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-*топологией* в H. Пусть $\tilde{u}$ для каждого $u \in H$ — непрерывное линейное отображение $x \to u_{x.}$ пространства E в $L_{\mathfrak{T}}(F, G)$. Показать, что $u \to \tilde{u}$ есть

изоморфизм пространства H, наделенного $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-топологией, на пространство $L_{\mathfrak{S}}(E, L_{\mathfrak{T}}(F, G))$.

б) Пусть L — множество из H такое, что для каждой пары $(x, y) \in E \times F$ множество точек $u(x, y)$ $(u \in L)$ ограниченно в G (т. е. *L ограниченно в H в топологии простой сходимости*). Показать, что если E, F и G локально выпуклы, причем E и F отделимы и квазиполны, то L ограниченно в H для каждой $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-топологии.

в) Пусть E, F, G — отделимые локально выпуклые пространства. Если E и F бочечны, причем F квазиполно, то каждое множество L из H, ограниченное в топологии простой сходимости, равностепенно $\mathfrak{T}$-гипонепрерывно.

г) Если E и F бочечны, G квазиполно, а $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ покрывают соответственно E и F, то H отделимо и квазиполно в $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-топологии.

9) Распространить определения и результаты § 4 на полилинейные отображения.

Пусть E, F, G — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ (соотв. $\mathfrak{T}$) — множество ограниченных подмножеств пространства E (соотв. F) и $\mathfrak{U}$ — множество ограниченных подмножеств пространства $L_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}}(E, F; G)$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывных отображений $E \times F$ в G, наделенного $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-топологией (упражнение 8). Показать, что трилинейное отображение $(x, y, u) \to u(x, y)$ произведения $E \times F \times L_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T}}(E, F; G)$ в G $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно; для того чтобы оно было $(\mathfrak{S}, \mathfrak{U})$-гипонепрерывно, необходимо и достаточно, чтобы каждое множество $H \in \mathfrak{U}$ было равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно.

*10) Пусть E — пространство всех последовательностей $x = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$ вещественных чисел, для которых ряд с общим членом ξ_n сходится. Положим $\|x\| = \sup \left| \sum_{k=0}^{n} \xi_k \right|$.

а) Показать, что $\|x\|$ — норма в E и E полно по этой норме.

б) Показать, что векторное пространство $L^1(\mathbf{N})$, рассматриваемое как подпространство пространства E, всюду плотно (в топологии пространства E), причем топология в $L^1(\mathbf{N})$, определяемая нормой $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$, сильнее топологии, индуцируемой из E.

в) Пусть (P_n) — возрастающая последовательность конечных подмножеств произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, покрывающая $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Для каждого $x = (\xi_n) \in E$ и каждого $y = (\eta_n) \in L^1(\mathbf{N})$ пусть $f_n(x, y) = \sum_{(i, j) \in P_n} \xi_i \eta_j$. Для того чтобы последовательность $(f_n(x, y))$ для каждой пары $(x, y) \in E \times L^1(\mathbf{N})$ стремилась к пределу, необходимо и достаточно чтобы эта последовательность для каждой такой пары (x, y) была ограниченна, причем предел $f_n(x, y)$ равен тогда $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \right)$.

[Используя упражненне 8в, показать, что последовательность билинейных форм (f_n) равностепенно непрерывна, и заметить, что она сходнтся на $L^1(\mathbf{N}) \times L^1(\mathbf{N})$; в заключенне использовать б).]

г) Пусть ρ_{jn}, для каждого $j \in \mathbf{N}$, — наимеиьшее количество замкнутых интервалов из $\mathbf{N}$, объеднненнем которых служит срез P_n по значению j второй координаты (проекция множества $P_n \bigcap (\mathbf{N} \times \{j\})$), и пусть $\rho_n = \sup_{j \in \mathbf{N}} \rho_{jn}$. Показать, что условне, полученное в в), равносильно условию $\sup_n \rho_n < +\infty$. [Показать, что норма билинейной формы f_n равна $\sup_{j \in \mathbf{N}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} | \varphi_n(i, j) - \varphi_n(i+1, j) | \right)$, где φ_n — характеристнческая функция множества P_n.]

ГЛАВА IV

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Слабые топологии

1. *Векторные пространства в двойственности*

Пусть F и G — векторные пространства и $(x, y) \to B(x, y)$ — *билинейная форма* на $F \times G$. Говорят, что билинейная форма B *приводит векторные пространства F и G в двойственность*, или что F и G *находятся в двойственности* (относительно B), если выполнены следующие два условия:

(D_I) *Для каждого* $x \neq 0$ *из* F *существует* $y \in G$ *такое, что* $B(x, y) \neq 0$.

(D_{II}) *Для каждого* $y \neq 0$ *из* G *существует* $x \in F$ *такое, что* $B(x, y) \neq 0$.

Примеры. 1) Пусть E — произвольное векторное пространство и E^* — *сопряженное* пространство (векторное пространство всех линейных форм на E). Каноническая билинейная форма $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ *) на $E \times E^*$ (Алг., гл. II, § 4, п° 1) приводит E и E^* в двойственность. Действительно, условие (D_{II}) выполнено по определению отношения $x' \neq 0$, а с другой стороны, известно, что для каждого $x \neq 0$ из E существует линейная форма $x' \in E^*$ такая, что $\langle x, x' \rangle \neq 0$ (Алг., гл. II, § 3, предложение 9), и тем самым выполнено также условие (D_I).

Если E — пространство *конечной* размерности n, то *единственным* подпространством G в E^*, находящимся в двойственности с E относительно сужения билинейной формы $\langle x, x' \rangle$ на $E \times G$, является само E^*. Действительно, так как E канонически отождествимо с пространством E^{**}, сопряженным к E^* (Алг., гл. II, § 4, п° 4), то при $G \neq E^*$ в E существовал бы элемент $a \neq 0$ такой, что $\langle a, x' \rangle = 0$ для каждого $x' \in G$ (Алг., гл. II, § 3, предложение 9), в противоречие с (D_I).

2) Если E — бесконечномерное векторное пространство и E' — векторное подпространство в E^*, то сужение билинейной формы $\langle x, x' \rangle$ (всегда удовлетворяющей условию (D_{II})) на произведение $E \times E'$ может удовлетворять условию (D_I) даже когда $E' \neq E^*$. Важнейший пример, которому будет посвящена бо́льшая часть этой главы, это тот, когда E есть *отделимое локально выпуклое пространство*, а E' —

*) $\langle x, x' \rangle$ — значение линейной формы $x' \in E^*$ на элементе $x \in E$. — *Прим. перев.*

подпространство в E^*, образованное всеми *непрерывными* линейными формами на E; действительно, из теоремы Хана — Банаха следует, что для каждого $x \neq 0$ из E существует $x' \in E'$ такое, что $\langle x, x' \rangle \neq 0$ (гл. II, § 5, следствие 2 теоремы 1). Векторное пространство E' называют *топологическим сопряженным* к E; оно зависит от топологии, заданной в E, но само не должно считаться наделенным топологией, если только последняя явно не указана. Допуская вольность речи, E' чаще всего называют просто *сопряженным* к E; а когда нужно говорить о пространстве E^*, то для избежания путаницы его называют *алгебраическим сопряженным* к E.

3) Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства, $E \otimes F$ — тензорное произведение векторных пространств E и F (Алг., гл. III, § 1, n° 1) и G — векторное пространство всех *непрерывных* билинейных форм на $E \times F$. Каковы бы ни были элемент $z = \sum_k x_k \otimes y_k$ из $E \otimes F$ и билинейная форма u на $E \times F$, число $\langle z, u \rangle = \sum_k u(x_k, y_k)$, как известно (Алг., гл. III, § 1, n° 2, Схолия), не зависит от выражения z в виде суммы тензорных произведений $x_k \otimes y_k$ и ясно, что $(z, u) \to \langle z, u \rangle$ есть билинейная форма на $(E \otimes F) \times G$, удовлетворяющая условию (D_{II}) по определению. Покажем, что она удовлетворяет также условию (D_I) и, следовательно, приводит пространства $E \otimes F$ и G в двойственность. Действительно, каждый элемент $z \neq 0$ из $E \otimes F$ может быть записан в виде $z = \sum_{i,j} a_i \otimes b_j$, где a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — линейно независимые элемеиты из E и b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — линейно независимые элементы из F (Алг., гл. III, § 1, следствие 2 предложения 7). Так как подпространство пространства E, порождеиное элементами a_i с номерами $i > 1$, замкнуто (гл. I, § 2, следствие 1 теоремы 2), то на E существует непрерывная линейная форма x_1' такая, что $\langle a_1, x_1' \rangle = 1$ и $\langle a_i, x_1' \rangle = 0$ для $i > 1$ (гл. II, § 3, следствие 3 предложения 4); точно так же на F существует непрерывиая линейная форма y_1' такая, что $\langle b_1, y_1' \rangle = 1$ и $\langle b_j, y_1' \rangle = 0$ для $j > 1$. Тогда $u(x, y) = \langle x, x_1' \rangle \langle y, y_1' \rangle$ есть непрерывная билинейная форма иа $E \times F$, для которой $\langle z, u \rangle = 1$, чем наше утверждение и доказано.

Пусть F и G — векторные пространства, приведенные в двойственность билинейной формой B, и $B_{\cdot z}$ для каждого $z \in G$ — линейная форма $y \to B(y, z)$ на F. Ясно, что $z \to B_{\cdot z}$ есть линейное отображение пространства G в алгебраическое сопряженное F^* к пространству F, а условие (D_{II}) означает, что это отображение взаимно однозначно и, следовательно, есть *изоморфизм* пространства G на его образ в F^*; чаще всего G отождествляют с этим образом. Точно так же пусть $B_{y\cdot}$ для каждого $y \in F$ — линейная форма $z \to B(y, z)$ на G; $y \to B_{y\cdot}$ есть линейное отображение про-

странства F в алгебраическое сопряженное G^* к пространству G, а условие (D_I) означает, что это отображение есть *изоморфизм* пространства F на его образ в G^*, что позволяет отождествлять F с его образом при этом изоморфизме. Когда эти отождествления выполнены, вместо $B(y, z)$ мы пишем $\langle y, z\rangle$.

2. *Слабые топологии*

Определение 1. *Пусть F и G — векторные пространства, приведенные в двойственность билинейной формой $(x, y) \to \langle x, y\rangle$. Слабой топологией $\sigma(F, G)$ в F, определяемой двойственностью между F и G, называют слабейшую из топологий в F, при которых непрерывны все линейные формы $x \to \langle x, y\rangle$ $(y \in G)$.*

Таким же образом, меняя в определении 1 ролями F и G, вводят слабую топологию $\sigma(G, F)$ в G; впрочем, эта возможность переставлять F и G относится ко всем результатам и определениям этого параграфа.

Для наименования свойств, относящихся к слабой топологии $\sigma(F, G)$, если это не сможет повлечь путаницы, мы будем иногда пользоваться прилагательным „слабое“ и наречием „слабо“. Так, например, мы будем говорить о „слабой сходимости“, „слабо непрерывной функции“ и т. д.

Обозначим тело скаляров пространств F и G (равное $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) через K. В силу условия (D_I), линейное отображение $x \to (\langle x, y\rangle)_{y \in G}$ пространства F в произведение K^G взаимно однозначно, что позволяет отождествлять F с векторным подпространством в K^G; слабая топология $\sigma(F, G)$ отождествляется тогда с топологией, индуцируемой в F из топологического произведения K^G, так что это — *отделимая локально выпуклая* топология, определяемая множеством полунорм $x \to |\langle x, y\rangle|$, где y пробегает G. Для каждого $\alpha > 0$ и каждого конечного числа точек y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ из G обозначим через $W(y_1, \ldots, y_n; \alpha)$ множество всех $x \in F$ таких, что $|\langle x, y_i\rangle| \leqslant \alpha$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; эти множества (с произвольными α, n и y_i) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\sigma(F, G)$. Заметим, что $W(y_1, \ldots, y_n; \alpha)$ содержит подпространство *конечной* факторразмерности в F, определяемое уравнениями $\langle x, y_i\rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Предложение 1. *Каждая линейная форма на F, непрерывная в топологии $\sigma(F, G)$, однозначно представима в виде $x \to \langle x, y\rangle$, где $y \in G$.*

Действительно, непрерывность линейной формы f на F в топологии $\sigma(F, G)$ означает, что в G существует конечное число точек y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что $|f(x)| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle x, y_i \rangle|$ (гл. II, § 5, предложение 9). Если поэтому $\langle x, y_i \rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $f(x) = 0$ и, следовательно (Алг., гл. II, § 4, п° 6), существует линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ такая, что $f(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in F$. Единственность этого представления вытекает из условия (D_{II}).

Другими словами, если F наделено топологией $\sigma(F, G)$, то G можно *отождествить с пространством, сопряженным к* F (п° 1, пример 2).

Следствие 1. *Для того чтобы семейство* (a_ι) *точек из* F *было тотальным в топологии* $\sigma(F, G)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого ненулевого* $y \in G$ *существовал индекс* ι *такой, что* $\langle a_\iota, y \rangle \neq 0$.

Действительно, это выражает, что никакая замкнутая гиперплоскость не содержит всех точек a_ι.

Следствие 2. *Для того чтобы семейство* (a_ι) *точек из* F *было топологически свободным в топологии* $\sigma(F, G)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого индекса* ι *существовал элемент* $b_\iota \in G$ *такой, что* $\langle a_\iota, b_\iota \rangle \neq 0$, *а* $\langle a_\varkappa, b_\iota \rangle = 0$ *для всех* $\varkappa \neq \iota$.

Действительно, это выражает, что для каждого ι существует замкнутая гиперплоскость, содержащая все $a_\varkappa$ с индексами $\varkappa \neq \iota$ и не содержащая a_ι.

Следствие 3. *Если* G_1 — *векторное подпространство в* G, *отличное от* G *и находящееся в двойственности с* F (относительно сужения $\langle x, y \rangle$ на $F \times G_1$), *то* $\sigma(F, G_1)$ *слабее, чем* $\sigma(F, G)$.

Действительно, если $y \in G$ не принадлежит G_1, то линейная форма $x \to \langle x, y \rangle$, в силу предложения 1, непрерывна в $\sigma(F, G)$, но не непрерывна в $\sigma(F, G_1)$.

3. Поляры

Определение 2. *Пусть* F *и* G — *векторные пространства над* $\mathbf{R}$, *находящиеся в двойственности, и* M — *произвольное мно-*

жество из F. Его полярой в G называется множество всех $y \in G$ таких, что $\langle x, y\rangle \leqslant 1$ для каждого $x \in M$.

Рассмотрим теперь векторные пространства F и G над $\mathbf{C}$, находящиеся в двойственности, и пусть F_0 и G_0 — их базисные векторные пространства над $\mathbf{R}$. Положим $B(x, y) = \Re(\langle x, y\rangle)$; ясно, что B — билинейная форма, приводящая в двойственность F_0 и G_0, причем $\langle x, y\rangle = B(x, y) - iB(ix, y)$ (гл. II, § 6, п° 1). Это подсказывает введение для комплексных векторных пространств следующего определения:

Определение 3. *Пусть F и G — векторные пространства над $\mathbf{C}$, находящиеся в двойственности, и M — произвольное множество из F. Его полярой в G называется множество всех $y \in G$ таких, что $\Re(\langle x, y\rangle) \leqslant 1$ для каждого $x \in M$.*

Там, где можно не опасаться путаницы, мы обозначаем поляру множества M из F в пространстве G через M°. Разумеется, таким же образом определяется и поляра в F множества из G. Всюду в дальнейшем свойства поляр исследуются одновременно для вещественных и комплексных векторных пространств.

Ясно, что $(\lambda M)^\circ = \lambda^{-1} M^\circ$ для любого скаляра $\lambda \neq 0$ и множества $M \subset F$; далее, $M \subset N$ влечет $N^\circ \subset M^\circ$; если N поглощает M, то M° поглощает N°; поляра объединения $\bigcup_\alpha M_\alpha$ любого семейства (M_α) множеств из F есть пересечение их поляр M_α°.

Если M — *уравновешенное* множество из F, то M° — уравновешенное множество в G; в этом случае M° есть множество всех $y \in G$ таких, что $|\langle x, y\rangle| \leqslant 1$ для каждого $x \in M$. Действительно, последнее равносильно выполнению неравенства $\Re(\langle \zeta x, y\rangle) \leqslant 1$ для каждого $x \in M$ и каждого ζ с $|\zeta| = 1$.

Предложение 2. *Поляра M° каждого множества M из F содержит 0 и является выпуклым множеством, замкнутым в топологии $\sigma(G, F)$.*

Справедливость утверждения сразу следует из определений, если принять во внимание непрерывность линейных форм $y \to \langle x, y\rangle$ в топологии $\sigma(G, F)$.

Замечания. 1) Пусть пространства F и G — вещественные и M — конус (с вершиной 0) в F; если $y \in M^\circ$, то $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \leqslant 1$ для каждого $\lambda > 0$, откуда $\langle x, y\rangle \leqslant 0$ для всех $x \in M$. Это показывает, что M° есть *слабо замкнутый выпуклый конус*, который можно определить как множество всех $y \in G$ таких, что $\langle x, y\rangle \leqslant 0$ для каждого $x \in M$.

2) Каждая окрестность нуля для $\sigma(G, F)$ содержит окрестность V, определенную конечным числом неравенств $|\langle x_i, y\rangle| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (№ 2), где x_i — какие-то элементы нз F. V есть поляра уравновешенной выпуклой оболочки множества A этих элементов x_i.

Предложение 3. *Поляра $M^{\circ\circ}$ поляры M° каждого множества M из F есть замкнутая (в $\sigma(F, G)$) выпуклая оболочка множеств M и $\{0\}$; при этом $(M^{\circ\circ})^\circ = M^\circ$.*

Пусть N — выпуклая оболочка множеств M и $\{0\}$; ясно, что $N^\circ = M^\circ$, так что можно ограничиться тем случаем, когда $N = M$. Предложение 2 показывает, что $M^{\circ\circ} \supset \overline{M}$; с другой стороны, если $a \in F$ не принадлежит $\overline{M}$, то существует замкнутая вещественная гиперплоскость H, строго отделяющая a и $\overline{M}$ (гл. II, § 3, предложение 4); не содержа начала, H имеет уравнение вида $\Re(\langle x, y\rangle) = 1$, где $y \in G$ (предложение 1), а, следовательно, $\Re(\langle x, y\rangle) < 1$ для всех $x \in \overline{M}$ и $\Re(\langle a, y\rangle) > 1$; это означает, что $y \in M^\circ$ и $a \notin M^{\circ\circ}$, откуда и вытекает, что $M^{\circ\circ} = \overline{M}$. Далее, так как $M \subset M^{\circ\circ}$, то $(M^{\circ\circ})^\circ \subset M^\circ \subset (M^\circ)^{\circ\circ} = (M^{\circ\circ})^\circ$, чем доказано и второе утверждение предложения.

Мы видим, таким образом, что M° не изменится, если заменить M замкнутой выпуклой оболочкой его объединения с множеством $\{0\}$.

Следствие. *Поляра пересечения $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ любого семейства (M_α) замкнутых (в $\sigma(F, G)$) выпуклых множеств из F, содержащих 0, есть замкнутая (в $\sigma(F, G)$) выпуклая оболочка объединения их поляр M_α°.*

Действительно, пусть N — эта замкнутая выпуклая оболочка; имеем

$$N^\circ = \bigcap_\alpha M_\alpha^{\circ\circ} = \bigcap_\alpha M_\alpha = M,$$

откуда $N = N^{\circ\circ} = M^\circ$.

4. Ортогональные подпространства

Пусть M — векторное подпространство в F; каждое $y \in M^\circ$ должно удовлетворять неравенству $\Re(\lambda\langle x, y\rangle) \leqslant 1$ для всех значений скаляра λ и всех $x \in M$, что возможно лишь если $\langle x, y\rangle = 0$. Говорят, что множества A из F и B из G *ортогональны*, если $\langle x, y\rangle = 0$ для каждой пары векторов $x \in A$, $y \in B$. Предыдущее замечание показывает, что поляра M° векторного подпространства M есть *векторное подпространство* в G, образованное всеми элементами y, *ортогональными* к M; его называют также *ортогональным дополнением* к M (или, допуская вольность речи, просто подпространством, *ортогональным* к M).

Из предложений 2 и 3 вытекает

Предложение 4. *Для каждого векторного подпространства M пространства F подпространство M° пространства G замкнуто в $\sigma(G, F)$, $M^{\circ\circ}$ есть замыкание M в $\sigma(F, G)$ и $(M^{\circ\circ})^\circ = M^\circ$.*

5. Подпространства и факторпространства пространства, наделенного слабой топологией

Пусть F и G — векторные пространства в двойственности и M — векторное подпространство в F. Рассмотрим его ортогональное дополнение M° в G. Если точки y_1 и y_2 из G сравнимы по модулю M°, то $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ для всех $x \in M$. Для каждого класса $\dot{y}$ по модулю M° (т. е. каждого элемента факторпространства G/M°) обозначим через $\langle x, \dot{y}\rangle$ постоянное значение, принимаемое билинейной формой $\langle x, y\rangle$, когда y пробегает $\dot{y}$; ясно, что $(x, \dot{y}) \to \langle x, \dot{y}\rangle$ есть билинейная форма на $M \times (G/M^\circ)$.

Предложение 5. *Форма $\langle x, \dot{y}\rangle$ приводит векторные пространства M и G/M° в двойственность.*

Это сразу следует из условия (D_I) и определения пространства M°.

Предложение 6. *Топология $\sigma(M, G/M^\circ)$ в M совпадает с топологией, индуцируемой в M слабой топологией $\sigma(F, G)$.*

Действительно, пусть y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — элементы из G и $\dot{y}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — их классы по модулю M°. Ясно, что множество

$W(\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n; \alpha)$ тех $x \in M$, для которых $|\langle x, \dot{y}_i\rangle| \leqslant \alpha$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, есть след на M окрестности $W(y_1, \ldots, y_n; \alpha)$, и предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть N — векторное подпространство в G. Для того чтобы топология $\sigma(F/N^\circ, N)$ в F/N° совпадала с фактортопологией слабой топологии $\sigma(F, G)$ по N°, необходимо и достаточно, чтобы N было замкнуто в G в топологии $\sigma(G, F)$.*

Предположим сначала, что N замкнуто в $\sigma(G, F)$. Пусть φ — каноническое отображение F на F/N° и $\mathfrak{T}$ — фактортопология топологии $\sigma(F, G)$ по N°. Ясно, что $\mathfrak{T}$ мажорирует топологию $\sigma(F/N^\circ, N)$. С другой стороны, пусть $V = W(y_1, \ldots, y_n; \alpha)$ — окрестность нуля в F для топологии $\sigma(F, G)$ и L — векторное подпространство в G, порожденное подпространством N и элементами y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; в L существует векторное подпространство P конечной размерности $m \leqslant n$, дополнительное к N; пусть $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — его базис. Сужения линейных форм $x \to \langle x, z_j\rangle$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ на N° линейно независимы; действительно, в противном случае существовало бы $z = \sum_{j=1}^{m} \mu_j z_j$, где не все μ_j равны нулю, такое, что $\langle x, z\rangle = 0$ для всех $x \in N^\circ$; но это означало бы, что $z \in N^{\circ\circ} = N$ (поскольку N замкнуто в топологии $\sigma(G, F)$), в противоречие с определением пространства P. Отсюда следует, что для каждого $x \in F$ существует $s \in N^\circ$ такое, что $0 = \langle x + s, z_j\rangle$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$; но $y_i = t_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} z_j$, где $t_i \in N$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; поэтому $\langle x, t_i\rangle = \langle x + s, y_i\rangle$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Полагая $W(t_1, \ldots, t_n; \alpha) = U$, заключаем отсюда, что $\varphi(U) \subset \varphi(V)$. Но так как U насыщено по отношению $x' - x \in N^\circ$, то $\varphi(U)$ есть окрестность нуля для топологии $\sigma(F/N^\circ, N)$, и тем самым доказано, что $\sigma(F/N^\circ, N)$ мажорирует топологию $\mathfrak{T}$.

Если теперь N не замкнуто в $\sigma(G, F)$ и $\overline{N}$ — его замыкание в этой топологии, то $(\overline{N})^\circ = N^\circ$ (предложение 4) и, значит, по предыдущему, фактортопологией топологии $\sigma(F, G)$ по N° служит $\sigma(F/N^\circ, \overline{N})$; но так как $N \neq \overline{N}$, то $\sigma(F/N^\circ, N)$ и $\sigma(F/N^\circ, \overline{N})$ различны (следствие 3 предложения 1).

Замечание. Если M — подпространство в F, имеющее конечную размерность m, то поскольку G/M° находится в двойственности с M,

M° имеет в G факторразмерность m (n° 1, пример). Если M — замкнутое пространство в F, имеющее конечную факторразмерность n, то $F/M = F/M^{\circ\circ}$ находится в двойственности с M° и потому M° n-мерно (n° 1, пример 1).

6. *Произведения слабых топологий*

Предложение 8. *Пусть* $(F_\iota, G_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство пар векторных пространств в двойственности,* $F = \prod_{\iota\in I} F_\iota$ *— произведение пространств* F_ι *и* G *— прямая сумма пространств* G_ι $(\iota \in I)$. *Для каждого* $x = (x_\iota) \in F$ *и каждого* $y = (y_\iota) \in G$ *положим* $\langle x, y\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle x_\iota, y_\iota\rangle$ (где в сумме лишь конечное число слагаемых $\neq 0$). *Билинейная форма* $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ *приводит* F *и* G *в двойственность, и топология* $\sigma(F, G)$ *есть произведение топологий* $\sigma(F_\iota, G_\iota)$.

Действительно, для каждого $x = (x_\iota) \neq 0$ из F имеется хотя бы один индекс ι такой, что $x_\iota \neq 0$, а для него $y_\iota \in G_\iota$ такое, что $\langle x_\iota, y_\iota\rangle \neq 0$; достаточно тогда взять $y = y_\iota$, чтобы $\langle x, y\rangle = \langle x_\iota, y_\iota\rangle \neq 0$. Так же убедимся в выполнении условия (D_{II}). С другой стороны, для того чтобы линейная форма $x \to \langle x, y\rangle$ была при каждом $y \in G$ непрерывна в некоторой топологии $\mathfrak{T}$ пространства F, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{T}$ было непрерывно каждое из отображений $x \to \langle \mathrm{pr}_\iota x, y_\iota\rangle$ (с произвольным $y_\iota \in G_\iota$), т. е. (гл. I, § 1, n° 9) чтобы было непрерывно каждое из отображений pr_ι (пространства F в F_ι, наделенное топологией $\sigma(F_\iota, G_\iota)$). Тем самым предложение полностью доказано.

Заметим, что подпространством в G, ортогональным к F_ι (рассматриваемому как подпространство пространства F), служит прямая сумма всех $G_\varkappa$ с индексами $\varkappa \neq \iota$.

Следствие. *Пусть* F *и* G *— векторные пространства в двойственности. Если пространство* F *(наделенное топологией* $\sigma(F, G)$*) есть топологическая прямая сумма своих подпространств* M *и* N, *то пространство* G *(наделенное топологией* $\sigma(G, F)$*) есть топологическая прямая сумма подпространств* M° *и* N°, *ортогональных соответственно к* M *и* N.

Действительно, пусть $M_1 = G/M^\circ$ и $N_1 = G/N^\circ$. По предположению, пространство F (наделенное топологией $\sigma(F, G)$) может быть

отождествлено с произведением $M \times N$, где M и N наделены соответственно топологиями $\sigma(M, M_1)$ и $\sigma(N, N_1)$ (предложение 6). Но (в силу предложения 1) G сопряжено к F (наделенному топологией $\sigma(F, G)$). Поэтому G (наделенное топологией $\sigma(G, F)$) может быть, в силу предложения 8, отождествлено с произведением $M_1 \times N_1$, где M_1 и N_1 наделены соответственно топологиями $\sigma(M_1, M)$ и $\sigma(N_1, N)$. Наконец, согласно замечанию, предшествующему доказываемому следствию, $N_1 = M^\circ$ и $M_1 = N^\circ$.

Замечание. Понятия векторных пространств в двойственности и слабой топологии, равно как и значительная часть результатов этого параграфа (по существу все те, где не участвует понятие выпуклого множества) допускают обобщение на значительно более широкий класс модулей и векторных пространств.

Упражнения. 1) Пусть A — бесконечное множество.

а) Пусть E — банаховское пространство $\mathscr{K}(A)$ (над $\mathbf{R}$), образованное семействами $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ вещественных чисел, такими, что $\alpha \to x_\alpha$ стремится к нулю по фильтру дополнений к конечным подмножествам множества A, и снабженное нормой $\|x\| = \sup_{\alpha \in A} |x_\alpha|$. Показать, что каждая непрерывная линейная форма на E однозначно представляется в виде $x \to \sum_{\alpha \in A} u_\alpha x_\alpha$, где (u_α) — семейство вещественных чисел, для которого $\sum_{\alpha \in A} |u_\alpha| < +\infty$; тем самым сопряженное пространство E' можно отождествить (как не топологическое векторное пространство) с пространством $L^1(A)$ (гл. I, § 1, n° 2, пример).

б) Пусть F — банаховское пространство $L^1(A)$. Показать, что каждая непрерывная линейная форма на F однозначно представляется в виде $x \to \sum_{\alpha \in A} u_\alpha x_\alpha$, где (u_α) — ограниченное семейство вещественных чисел; тем самым сопряженное пространство можно отождествить (как не топологическое векторное пространство) с пространством $\mathscr{B}(A) = L^\infty(A)$.

в) Пусть B — произвольное множество, $(c_{\alpha\beta})_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ — произвольное семейство вещественных чисел $\geqslant 0$ и G — векторное пространство всех таких семейств $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ вещественных чисел, что $p_\beta(x) = \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha\beta} |x_\alpha| < +\infty$ для каждого $\beta \in B$; p_β — полунормы на G. Для того чтобы G, наделенное топологией, определяемой этим семейством полунорм, было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\alpha \in A$ существовало по крайней мере одно β такое, что $c_{\alpha\beta} > 0$. Показать, что G тогда полно и каждая непрерывная линейная форма на G однозначно представима в виде $x \to \sum_{\alpha \in A} u_\alpha x_\alpha$, где (u_α) —

семейство вещественных чисел, обладающее тем свойством, что по крайней мере для одного индекса $\beta \in B$ существует $a > 0$ такое, что $|u_\alpha| \leqslant a c_{\alpha\beta}$ для всех α; и обратно.

*2) Пусть E — вещественное векторное пространство конечной размерности n и A — выпуклое тело в E, содержащее 0 в качестве внутренней точки.

а) Пусть a — граничная точка тела A. Показать, что множество F'_a всех точек $x' \in A^\circ$, для которых $\langle a, x' \rangle = 1$, есть замкнутое выпуклое подмножество в A°, состоящее из ие окруженных точек множества A° (гл. II, § 2, упражнение 3). F'_a совпадает с гранью в A° (гл. II, § 4, упражнение 4) каждой из своих окруженных точек; говорят, что F'_a — *сопряженная к a грань* тела A°. Пусть F_a — грань a в A; показать, что сопряженная грань в A° каждой окруженной точки из F_a совпадает с F'_a и что F_a есть сопряженная грань каждой окруженной точки из F'_a; F_a и F'_a называются *сопряженными гранями*.

б) Пусть F и F' — сопряженные грани. Показать, что если F — размерности p и F' — размерности q, то $p + q \leqslant n - 1$. *Порядком* каждой граничной точки x тела A называется размерность ее грани в A, а *классом* — размерность сопряженной ей грани в A°. Порядок (соотв. класс) грани тела A есть порядок (соотв. класс) любой из ее окруженных точек. Экстремальная точка тела A есть точка порядка 0.

в) Точка класса $n - 1$ (и, следовательно, порядка 0) называется *острием* тела A. Показать, что острия тела A образуют счетное множество. [Рассмотреть множество граней, сопряженных к остриям тела A, и применить упражнение 12 из Общ. топ., гл. VI, § 2 ([7]).]

г) Пусть F — грань тела A, p — ее размерность, M — линейное многообразие размерности $n - p$, имеющее с F одну только общую точку a, являющуюся окруженной точкой в F, и содержащее внутреннюю точку тела A. Показать, что если V — опорная гиперплоскость множества $M \cap A$ в M, проходящая через a, то гиперплоскость H, порождаемая (в E) множествами F и V, есть опорная гиперплоскость тела A.

д) Грань F порядка p и класса q называется *регулярной*, если $p + q = n - 1$. Показать, что если линейное многообразие M размерности $n - p$ имеет с такой гранью F одну только общую окруженную в F точку, то эта точка есть острие выпуклого множества $M \cap A$, и обратно. [Использовать г).] Вывести отсюда, что в A множество регулярных граней порядка p счетно. [Рассмотреть проекцию A на каждое из координатных многообразий V размерности p (при отождествлении E с $\mathbf{R}^n$); рассматривая точки из V с рациональными координатами, показать, что если бы множество регулярных граней порядка p, проекция которых на V имеет размерность p, было несчетным, то в V существовала бы точка, являющаяся окруженной точкой несчетного множества этих проекций; затем использовать в).] Дать пример выпуклого множества, обладающего несчетным множеством ие регулярных граней.

е) Показать, что если все граничные точки тела A — класса 0, то отображение, относящее каждой граничной точке x единственную точку сопряженной к ней грани, есть непрерывное отображение границы тела A на границу сопряженного тела A°. [См. Общ. топ., Рез., § 8, n° 9; гл. I, § 10, теорема 1.] Когда это отображение взаимно однозначно?

3) Пусть E — вещественное векторное пространство конечной размерности n, C — замкнутый выпуклый конус размерности n с вершиной 0, отличный от E, и $a \neq 0$ — его граничная точка. Показать, что множество F'_a всех точек $x' \in C^\circ$, для которых $\langle a, x' \rangle = 0$, есть замкнутое выпуклое множество в C°, образованное из не окруженных точек множества C°; F'_a совпадает с гранью в C° каждой из своих окруженных точек; F'_a называется *гранью* множества C°, *сопряженной* к a. Доказать для этого понятия свойства, соответствующие установленным в упражнении 2.

4) а) Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — *ограниченное* выпуклое множество размерности n, являющееся пересечением конечного числа замкнутых полупространств („выпуклый полиэдр"). Показать, что граница множества A есть объединение конечного числа выпуклых полиэдров размерности $< n$. Вывести отсюда, что A есть выпуклая оболочка конечного множества. [Принять во внимание, что A есть выпуклая оболочка своей границы.]

б) Обратно, показать, что выпуклое множество A размерности n в $\mathbf{R}^n$, являющееся выпуклой оболочкой конечного множества, есть выпуклый полиэдр. [Предполагая, что 0 — внутренняя точка множества A, применить а) к поляре A° этого множества.]

в) Показать, что каждая грань выпуклого полиэдра A размерности n регулярна. [Упражнение 2д; доказательство провести индукцией по n.]

5) Пусть F и G — вещественные векторные пространства в двойственности и M — слабо ограниченное множество в F; тогда M° — поглощающее выпуклое множество в G. Для каждого $y \in G$ положим $h(y) = \sup\limits_{x \in M} \langle x, y \rangle$; h называют *опорной функцией* множества M.

а) Показать, что если M слабо компактно, то гиперплоскость, заданная уравнением $\langle x, y \rangle = h(y)$, есть опорная гиперплоскость множества M.

б) Будем всюду в дальнейшем предполагать, что M содержит начало. Показать, что h есть *калибровочная функция* множества M° (гл. II, § 5, n° 3); вывести отсюда, что если M — поглощающее слабо замкнутое выпуклое множество, то его калибровочная функция p есть опорная функция множества M°, причем $\langle x, y \rangle \leqslant p(x) h(y)$, каковы бы ни были $x \in F$ и $y \in G$.

в) Показать, что если $h(y)$ — опорная функция множества M, то опорной функцией множества $-M$ служит $h(-y)$.

г) Пусть M_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — слабо ограниченные выпуклые множества в F, h_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — опорная функция множества M_i и λ_i

$(1 \leqslant i \leqslant p)$ — вещественные числа $\geqslant 0$. Показать, что опорной функцией выпуклого множества $M = \sum_i \lambda_i M_i$ служит $h = \sum_i \lambda_i h_i$.

д) Пусть y — фиксированный элемент из G и C_i — пересечение множества M_i с гиперплоскостью $\langle x, y\rangle = h_i(y)$ (предполагаемое непустым). Показать, что пересечением множества M с гиперплоскостью $\langle x, y\rangle = h(y)$ служит множество $\sum_i \lambda_i C_i$.

6) Каждому компактному выпуклому множеству A в $E = \mathbf{R}^n$ поставим в соответствие его опорную функцию h_A, определяемую двойственностью между E и его алгебраическим сопряженным E^*, отождествленным с E (упражнение 5); h_A принадлежит пространству $\mathcal{C}(E, \mathbf{R})$ всех непрерывных числовых функций на E. Наделим это пространство равномерной структурой компактной сходимости, а множество $\mathfrak{K}_1(E)$ всех компактных выпуклых подмножеств пространства E — равномерной структурой, определенной в упражнении 9 § 5 гл. II. Показать, что $A \to h_A$ есть изоморфизм $\mathfrak{K}_1(E)$ в $\mathcal{C}(E, \mathbf{R})$.

Вывести отсюда, что отображение $A \to A^\circ$ множества $\mathfrak{K}_0(E)$ всех компактных выпуклых тел в E, имеющих 0 своей внутренней точкой, на миожество $\mathfrak{K}_0(E^*)$ есть изоморфизм для равиомерных структур этих пространств. [См. гл. II, § 5, упражнение 9.]

7) Пусть F и G — вещественные векторные пространства в двойственности, A — слабо компактное выпуклое множество в F, C — слабо замкнутый выпуклый конус с вершиной 0 в G. Предположим, что для каждого $y \in C$ существует $x \in A$ такое, что $\langle x, y\rangle \leqslant 0$. Показать, что существует $x_0 \in A$ такое, что $\langle x_0, y\rangle \leqslant 0$ для всех $y \in C$. [Применить предложение 4 § 3 гл. II к A и C°.]

*8) а) Пусть F и G — вещественные векторные пространства в двойственности, C — слабо замкиутый выпуклый конус в F, H — *конечномерное* векторное подпространство в G. Показать, что либо существует $y_0 \in C$ такое, что $y_0 \in H^\circ$ и $y_0 \neq 0$, либо существует $z_0 \in H$ такое, что $z_0 \in C^\circ$ и $z_0 \neq 0$. [Использовать упражнение 10 § 3 гл. II.] Показать, что если C не содержит никакой прямой и оба указаиных свойства имеют место одновременно, то z_0 не может быть окруженной точкой в C°.

б) Пусть (a_{ij}), (b_{ij}) — две вещественные матрицы с n строками и m столбцами, причем $a_{ij} > 0$ для каждой пары (i, j). Показать, что существует однозначно определенное $\lambda \in \mathbf{R}$, для которого имеются два вектора $\boldsymbol{x} = (x_j) \in \mathbf{R}^m$ и $\boldsymbol{y} = (y_i) \in \mathbf{R}^n$ такие, что $\boldsymbol{x} \neq 0$, $\boldsymbol{y} \neq 0$, $x_j \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ для всех i и j и, наконец,

$$\lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geqslant \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{1}$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i \quad (1 \leqslant j \leqslant m). \tag{2}$$

[Полагая $c_{ij} = \lambda a_{ij} - b_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ и $c_{n+i,\,j} = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (где δ_{ij} — кронекеровский символ), показать, что задача сводится к нахождению ненулевых векторов $x \in \mathbf{R}^m$ и $z = (z_i) \in \mathbf{R}^{n+m}$, для которых

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n+m), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} c_{ij} z_i = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{4}$$

и $z_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n+m)$. Принять во внимание, что если неравенство (3) обладает решением для значения $\lambda = \lambda_0$, то оно обладает решением также для $\lambda \geqslant \lambda_0$, и что если уравнение (4) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$, то оно имеет решение для $\lambda \leqslant \lambda_0$. Наконец, использовать а).]

*9) Пусть F и G — вещественные векторные пространства в двойственности. Для того чтобы ультрафильтр $\mathfrak{F}$ в F слабо сходился к точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала пересечению всех слабо замкнутых выпуклых множеств, содержащихся в $\mathfrak{F}$. [Принять во внимание, что если x_0 есть точка этого пересечения, не являющаяся точкой прикосновения для $\mathfrak{F}$, то существует замкнутое полупространство, принадлежащее $\mathfrak{F}$ и не содержащее x_0.]

Вывести из этого результата, что для того, чтобы последовательность (x_n) точек из F слабо сходилась к точке a, необходимо и достаточно, чтобы эта точка a принадлежала слабо замкнутой выпуклой оболочке каждого бесконечного множества точек последовательности (x_n). [Использовать упражнение 9 из Общ. топ, гл. I, § 5 (24).]

10) а) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Показать, что если F относительно ограниченно (гл. III, § 2, упражнение 21) в топологии $\sigma(F, G)$, то G относительно ограниченно в топологии $\sigma(G, F)$.

б) Пусть F — векторное пространство и G_1, G_2 — векторные подпространства в F^*, находящиеся оба в двойственности с F. Показать, что если F относительно ограниченно в топологиях $\sigma(F, G_1)$ и $\sigma(F, G_2)$, то оно относительно ограниченно и в топологии $\sigma(F, G_1 + G_2)$.

в) Предположим, что F обладает счетным базисом. Показать, что F относительно ограниченно в топологии $\sigma(F, G)$ для каждого векторного подпространства G из F^*, находящегося в двойственности с F и обладающего счетным базисом. [Определить по индукции базисы (a_n), и (b_n) в F и G соответственно так, чтобы $\langle a_n, b_m \rangle = \delta_{nm}$.]

*11) Пусть F — вещественное или комплексное векторное пространство, K (равное $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) — его тело скаляров и G — подпространство его алгебраического сопряженного F^*.

а) Для того чтобы F и G находились в двойственности, необходимо и достаточно, чтобы G было всюду плотно в F^* в топологии $\sigma(F^*, F)$.

б) Показать, что F^*, наделенное топологией $\sigma(F^*, F)$, изоморфно некоторому топологическому произведению K^I; в частности, это — полное пространство, в котором каждое ограниченное множество относительно компактно.

в) Вывести из а) и б), что если F и G находятся в двойственности и G наделено топологией $\sigma(G, F)$, то его пополнение изоморфно пространству F^*, наделенному топологией $\sigma(F^*, F)$; кроме того, каждое множество из G, ограниченное в топологии $\sigma(G, F)$, *предкомпактно* в этой топологии.

г) Наделим F топологией $\sigma(F, F^*)$. Показать, что каждое ограниченное множество в F конечномерно. Вывести отсюда, что если F бесконечномерно, то в его пополнении $\hat{F}$ существуют компактные множества, не содержащиеся в замыкании никакого ограниченного множества из F. [Использовать б) и в).]

д) Показать, что в пространстве F, наделенном топологией $\sigma(F, F^*)$, каждое векторное подпространство замкнуто и обладает топологическим дополнением. Вывести отсюда, что в пространстве F^*, наделенном топологией $\sigma(F^*, F)$, каждое замкнутое векторное подпространство обладает топологическим дополнением. [Использовать следствие предложения 8.]

*12) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности, причем G (соотв. F) отождествлено с пространством, сопряженным к F (соотв. G), наделенному топологией $\sigma(F, G)$ (соотв. $\sigma(G, F)$). Пусть, далее, $\mathfrak{S}$ (соотв. $\mathfrak{T}$) — покрытие пространства F (соотв. G), образованное уравновешенными выпуклыми множествами, ограниченными в топологии $\sigma(F, G)$ (соотв. $\sigma(G, F)$). Доказать равносильность следующих утверждений:

а) Каждое множество $M \in \mathfrak{S}$ предкомпактно в $\mathfrak{T}$-топологии.

б) Каждое множество $N \in \mathfrak{T}$ предкомпактно в $\mathfrak{S}$-топологии.

в) На каждом множестве $M \in \mathfrak{S}$ топологии, индуцируемые $\mathfrak{T}$-топологией и топологией $\sigma(F, G)$, совпадают.

г) На каждом множестве $N \in \mathfrak{T}$ топологии, индуцируемые $\mathfrak{S}$-топологией и топологией $\sigma(G, F)$, совпадают.

[Для доказательства того, что а) влечет г), использовать предложение 5 § 3 гл. III, а того, что г) влечет б), — упражнение 1 § 2 гл. II.]

*13) Пусть E — вещественное или комплексное векторное пространство и K — его тело скаляров. Отделимая локально выпуклая топология $\mathfrak{F}$ в E называется *минимальной* (а E, наделенное этой топологией $\mathfrak{F}$, — пространством *минимального типа*), если в E не существует никакой отделимой локально выпуклой топологии, более слабой чем $\mathfrak{F}$.

а) Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная топология в E и E' — пространство, сопряженное к E (наделенному топологией $\mathfrak{F}$). Показать, что $\mathfrak{F} = \sigma(E, E')$ и $E = E'^*$. [Принять во внимание, что, в силу следствия 3 предложения 1, в E' не может содержаться гиперплоскость, всюду плотная

в топологии $\sigma(E', E)$.] Вывести отсюда, что для того, чтобы отделимое локально выпуклое пространство было минимального типа, необходимо и достаточно, чтобы оно было изоморфно некоторому топологическому произведению K^I. [См. упражнение 11б.]

б) Каждое замкнутое векторное подпространство пространства минимального типа есть пространство минимального типа. [См. упражнение 11д.]

в) Показать, что в отделимом локально выпуклом пространстве F каждое подпространство E минимального типа обладает топологическим дополнением и, в частности, замкнуто. [Использовать а) и теорему Хана — Банаха для продолжения тождественного отображения E на себя до отображения F в E.]

г) Пусть u — непрерывное линейное отображение пространства E минимального типа в отделимое локально выпуклое пространство F. Показать, что $u(E)$ замкнуто в F и u — гомоморфизм E на $u(E)$. [Использовать в) и определенне пространства минимального типа.]

д) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство и M — замкнутое векторное подпространство в F. Показать, что если M обладает в F дополнением N, являющимся подпространством минимального типа, то N есть топологическое дополнение к M. [Использовать г).]

е) Пусть M — подпространство минимального типа в отделимом локально выпуклом пространстве F. Показать, что $M+N$ замкнуто для любого замкнутого векторного подпространства N пространства F. [Рассмотреть факторпространство E/N и использовать г).] Если, кроме того, N — минимального типа, то и $M+N$ минимального типа.

*14) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и F — локально выпуклое пространство минимального типа (упражнение 13).

а) Показать, что проекция замкнутого векторного подпространства M произведения $E \times F$ на E замкнута. [Использовать упражнение 13е.]

б) Пусть u — линейное отображение E в F. Показать, что если график u замкнут в $E \times F$, то u непрерывно. [Использовать а).]

в) Предположим, что каждое замкнутое векторное подпространство в E обладает топологическим дополненнем. Показать, что и в $E \times F$ каждое замкнутое векторное подпространство M имеет топологнческое дополнение. [Пусть N_1 — проекция M на E, N_2 — топологическое дополнение к N_1 в E, $P_1 = M \cap F$ и P_2 — топологическое дополнение к P_1 в F; используя б), показать, что $N_2 + P_2$ есть топологическое дополнение к M в $E \times F$.]

15) Обобщить определения и результаты этого параграфа на векторные пространства над телом кватернионов.

*16) Пусть $F = \mathbf{R}^{(A)}$ и $G = \mathbf{R}^A$, где A — произвольное бесконечное множество; F и G приводятся в двойственность билинейной формой $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} x(\alpha)\, y(\alpha)$.

а) Пусть N — аддитивная подгруппа в G; обозначим через N^* подгруппу тех $x \in F$, для которых все $\langle x, y\rangle$ $(y \in N)$ — целые, и через N^{**} — подгруппу тех $z \in G$, для которых все $\langle x, z\rangle$ $(x \in N^*)$ — целые. Показать, что N^* замкнута в F в топологии $\sigma(F, G)$ и $N^{**} = \overline{N}$, где $\overline{N}$ — замыкание N в топологии $\sigma(G, F)$. [Для установления справедливости последнего утверждения использовать предложение 6 из Общ. топ., гл. VII, § 1 ([25]), проектируя N на конечномерные координатные многообразия в G.]

б) Предположим, что $A = \mathbf{N}$, и пусть M — подгруппа в F, замкнутая в топологии $\sigma(F, G)$. Показать, что M есть топологическая прямая сумма наибольшего векторного подпространства V, содержащегося в M, и замкнутой подгруппы P, являющейся свободным $\mathbf{Z}$-модулем со счетным базисом. [Рассматривать F как объединение возрастающей последовательности (F_n) его конечномерных векторных подпространств и применить теорему 2 и упражнение 7 из Общ. топ., гл. VII, § 1 ([26]).] Для того чтобы подгруппа P была дискретной (в топологии, индуцируемой топологией $\sigma(F, G)$), необходимо и достаточно, чтобы она была конечномерна.

в) Вывести из а) и б), что каждая замкнутая подгруппа в G (наделенном топологией $\sigma(G, F)$) может быть преобразована посредством автоморфизма топологической группы G в произведение вида $\mathbf{R}^I \times \mathbf{Z}^J$, где I и J — непересекающиеся подмножества из $\mathbf{N}$.

г) Показать, что в пространстве $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, наделенном топологией $\sigma(E, E^*)$, подгруппа $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ замкнута и не содержит никакой прямой, не будучи, однако, свободным $\mathbf{Z}$-модулем. [Алг., гл. VII, § 3, упражнение 10 ([27]).] [Тем самым результаты из б) не распространяются на случай несчетного A.

§ 2. Сопряженное к отделимому локально выпуклому пространству

В этом и следующих параграфах всюду, где не оговорено противное, рассматриваются лишь отделимые локально выпуклые пространства (над $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$).

1. Слабая и ослабленная топологии

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и $\mathfrak{T}$ — его топология. Напомним, что (топологическое) *сопряженное* к E есть подпространство E' алгебраического сопряженного E^*, образованное из всех *непрерывных* линейных форм на E; мы видели (§ 1, п° 1, пример 2), что E и E' приводятся в двойственность канонической билинейной формой $\langle x, x'\rangle$. В этом параграфе мы изучим связи между топологией $\mathfrak{T}$, заданной в E, и топологиями $\sigma(E, E')$

и $\sigma(E', E)$; напомним, что последние *локально выпуклы* и *отделимы* (§1, п° 2). В E' мы будем рассматривать *в этом параграфе* одну только топологию $\sigma(E', E)$, которая будет именоваться *слабой топологией*. Напротив, в E определены уже две топологии: топология $\mathcal{T}$, которую мы будем называть также *исходной топологией* в E, и топология $\sigma(E, E')$, которая, по определению, *мажорируется* топологией $\mathcal{T}$ и будет называться ассоциированной с ней *ослабленной топологией* в E.

Замечания. 1) Если наделить пространство E топологией $\sigma(E, E')$, то его сопряженным снова будет E' (§ 1, предложение 1; см. ниже п° 3); тем самым ослабленной топологией, ассоцинрованной с $\sigma(E, E')$, является $\sigma(E, E')$. Там, где это не сможет повлечь путаницы, мы будем употреблять прилагательное „слабое" и наречие „слабо" для обозначения свойств, относящихся как к слабой топологии в E', так и к ослабленной топологии в E, E', наделенное слабой топологией $\sigma(E', E)$, будет иногда называться „слабым сопряженным" к E.

2) Пусть E — комплексное локально выпуклое пространство и E_0 — его базисное вещественное локально выпуклое пространство. Как известно (гл. II, § 6, п° 1), отображение $f \to \Re f$ есть (алгебранческий) изоморфнзм пространства E', сопряженного к E, на пространство E_0', сопряженное к E_0. Кроме того, мы знаем (там же), что если $g = \Re f$, то, обратно, $f(x) = g(x) - ig(ix)$ для всех $x \in E$, откуда $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ и $|f(x)| \leqslant |g(x)| + |g(ix)|$. Это показывает, что указанный выше изоморфизм является также нзоморфизмом для слабых топологий $\sigma(E', E)$ и $\sigma(E_0', E_0)$ и что ослабленные топологии в E н E_0 совпадают.

2. *Свойства слабого сопряженного*

Во всем дальнейшем, если E означает отделимое локально выпуклое пространство, под E' понимается сопряженное пространство, и, говоря о поляре M° (соотв. M'°) множества M из E (соотв. M' из E'), мы всюду, где не оговорено противное, имеем в виду поляру множества M (соотв. M') в E' (соотв. E), определяемую двойственностью между E и E'.

Слабая топология в пространстве E', сопряженном к вещественному (соотв. комплексному) локально выпуклому пространству E, есть не что иное, как *топология простой сходимости* в $L(E, \mathbf{R})$ (соотв. $L(E, \mathbf{C})$). Поэтому к ней применимы результаты § 3 гл. III.

Всюду, где в этом и следующем параграфах говорится о *равностепенно непрерывных* множествах в E', это понятие относится

к *исходной топологии* в E. Разумеется, оно не зависит ни от какой топологии, которая может рассматриваться в E'.

Предложение 1. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Для того чтобы множество $M' \subset E'$ было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его поляра M'° была окрестностью нуля (в исходной топологии) в E или* (что то же) *чтобы M' содержалось в поляре V° некоторой окрестности нуля V (в исходной топологии) из E.*

Действительно, каждая окрестность нуля в теле скаляров содержит гомотетичный образ окрестности U, определяемой неравенством $|\xi| \leqslant 1$. Поэтому для равностепенной непрерывности множества M' необходимо и достаточно, чтобы пересечение V множеств $x'^{-1}(U)$ ($x' \in M'$) было окрестностью нуля в E (гл. III, § 3, n° 5); но это пересечение есть не что иное, как поляра уравновешенной выпуклой оболочки множества M' (§ 1, n° 3), чем первое утверждение и доказано. Очевидно, тогда $M' \subset V^\circ$; обратно, если $M' \subset V^\circ$, где V — окрестность нуля в E, то $M'^\circ \supset V^{\circ\circ} \supset V$, что и завершает доказательство предложения.

Предложение 2. *Каждое равностепенно непрерывное множество в пространстве E', сопряженном к локально выпуклому пространству E, относительно компактно в слабой топологии.*

Это следует из общего условия компактности равностепенно непрерывного множества в $L(E, F)$ в топологии простой сходимости (гл. III, § 3, следствие предложения 4), поскольку каждое ограниченное множество в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ относительно компактно.

Теорема 1. *Пусть E — бочечное пространство. Следующие свойства множества $M' \subset E'$ равносильны:*

а) *M' ограниченно в слабой топологии;*

б) *M' относительно компактно в слабой топологии;*

в) *M' равностепенно непрерывно.*

Действительно, мы уже видели, что в) влечет б) (предложение 2), а, с другой стороны, каждое относительно слабо компактное множество слабо ограниченно (гл. III, § 2, предложение 3), так что б) влечет а). Наконец, то, что а) влечет в),

является частным случаем совпадения в $L(E, F)$ множеств, ограниченных в топологии простой сходимости, с равностепенно непрерывными множествами, когда E бочечно (гл. III, § 3, теорема 2).

Следствие 1. *Если E — бочечное пространство, то замкнутая выпуклая оболочка каждого слабо компактного множества в E' слабо компактна.*

Действительно, из теоремы 1 и предложений 1 и 2 следует, что каждое слабо компактное множество из E' содержится в поляре V° некоторой окрестности нуля V пространства E, а V° выпукло и слабо компактно.

Следствие 2. *Если E — бочечное пространство, то E' в слабой топологии квазиполно.*

Действительно, каждое слабо замкнутое ограниченное множество в E' слабо компактно (теорема 1) и потому полно.

Следствие 3. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства. Наделим F' слабой топологией $\sigma(F', F)$, а пространство $L(E, F')$ всех непрерывных линейных отображений E в F' — топологией простой сходимости. Если тогда F бочечно, то каждое равностепенно непрерывное множество в $L(E, F')$ относительно компактно; если и E и F бочечны, то каждое ограниченное множество в $L(E, F')$ относительно компактно.*

Действительно, в силу теоремы 1, тогда в F' каждое ограниченное (в топологии $\sigma(F', F)$) множество относительно компактно, так что первое утверждение следствия вытекает из характеризации множеств из $L(E, F')$, относительно компактных в топологии простой сходимости (гл. III, § 3, следствие предложения 4). Второе утверждение вытекает из совпадения в $L(E, F')$ множеств, ограниченных в топологии простой сходимости, с равностепенно непрерывными множествами, когда E бочечно (гл. III, § 3, теорема 2).

Предложение 3. *Пусть E — локально выпуклое пространство, содержащее тотальное счетное множество. Тогда каждое равностепенно непрерывное множество P' в E', замкнутое в слабой топологии, является в этой топологии метризуемым компактным пространством.*

Действительно, P' компактно в силу только что доказанного предложения 2. С другой стороны, P' метризуемо, так как к нему применимо условие метризуемости равностепенно непрерывных множеств из $L(E, F)$ (гл. III, § 3, предложение 6), поскольку $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ — метризуемые пространства.

Следствие. *Если E — метризуемое локально выпуклое пространство, содержащее тотальное счетное множество, то в E' существует счетное множество, всюду плотное в слабой топологии.*

Действительно, пусть (U_n) — счетная фундаментальная система окрестностей нуля в E. E' есть объединение множеств U_n^0; в силу предложения 3, каждое U_n^0 есть слабо компактное метризуемое пространство и потому содержит счетное подмножество A_n', всюду плотное в U_n^0 в топологии $\sigma(E', E)$ (Общ. топ., Рез., § 8, n° 3; гл. IX, § 2, n° 7). Объединение множеств A_n' есть счетное множество, плотное в E'.

3. Топологии, согласующиеся с заданной двойственностью

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное. E' будет сопряженным к E и в том случае, если E наделить ослабленной топологией $\sigma(E, E')$ (§ 1, предложение 1). Для исследования связей между исходной топологией в E и ослабленной топологией $\sigma(E, E')$ мы рассмотрим, более общим образом, произвольную пару (F, G) векторных пространств в двойственности

Определение 1. *Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Говорят, что отделимая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}$ в F согласуется с двойственностью между F и G, если G (рассматриваемое как подпространство пространства F^*) является сопряженным к отделимому локально выпуклому пространству, получаемому путем наделения F топологией $\mathfrak{T}$.*

Предложение 4. *Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Для всех отделимых локально выпуклых топологий в F, согласующихся с этой двойственностью между F и G, замкнутые выпуклые множества в F — одни и те же.*

Очевидно, можно ограничиться тем случаем, когда F и G — вещественные векторные пространства. Так как для всех топологий,

согласующихся с двойственностью между F и G, непрерывные линейные формы на F — одни и те же, то то же верно и для замкнутых выпуклых множеств в F, поскольку такое множество может быть задано семейством неравенств $f_\iota(x) \leqslant a_\iota$, где f_ι — непрерывные линейные формы на F (гл. II, § 3, следствие 1 предложения 4).

Следствие 1. *Выпуклое множество $A \subset F$ имеет одно и то же замыкание во всех отделимых локально выпуклых топологиях в F, согласующихся с двойственностью между F и G.*

Действительно, замыкание множества A в любой локально выпуклой топологии в F выпукло (гл. II, § 1, предложение 14) и, следовательно, есть пересечение всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих A.

В частности:

Следствие 2. *Выпуклое множество A в отделимом локально выпуклом пространстве E имеет одно и то же замыкание как в исходной топологии пространства E, так и в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$. Если A содержит 0, то это замыкание совпадает с $A^{\circ\circ}$.*

Последнее утверждение вытекает из предложения 3 § 1.

Замечание. Следствие 2 применимо, в частности, к векторным подпространствам; тем самым критерии того, что семейство точек из E *тотально* или *топологически свободно* в ослабленной топологии (§ 1, следствия 1 и 2 предложения 1), являются также критериями того, что это семейство тотально или топологически свободно и в исходной топологии.

Следствие 3. *Бочки в отделимом локально выпуклом пространстве E — это поляры слабо ограниченных уравновешенных множеств из E'.*

В силу следствия 2, безразлично, сказать ли, что множество M из E есть бочка в исходной топологии или в ослабленной. Но для того, чтобы M было выпуклым, уравновешенным и замкнутым в топологии $\sigma(E, E')$, необходимо и достаточно, чтобы $M = M^{\circ\circ}$, поскольку M° — уравновешенное (§ 1, n° 3); а для того чтобы M поглощало каждое конечное множество N из E, необходимо и достаточно, чтобы M° поглощалось множеством N°; но так как множества N°

образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии $\sigma(E', E)$ (§ 1, n° 3), то это означает, что M° слабо ограниченно.

Если F и G — векторные пространства в двойственности, то F можно рассматривать как *сопряженное* к G, наделенному отделимой локально выпуклой топологией $\sigma(G, F)$ (§ 1, предложение 1). Поэтому в F можно рассматривать топологию равномерной сходимости на элементах любого множества $\mathfrak{S}$ ограниченных (в топологии $\sigma(G, F)$) подмножеств из G, т. е. $\mathfrak{S}$-*топологию* (гл. III, § 3, n° 1). Предположим, что $\mathfrak{S}$ вместе с каждым своим множеством содержит и образы его при всевозможных гомотетиях (с ненулевым коэффициентом), а также вместе с каждым конечным числом своих множеств — и замкнутую (в топологии $\sigma(G, F)$) уравновешенную выпуклую оболочку их объединения. Тогда определение окрестностей нуля для $\mathfrak{S}$-топологии (там же) показывает, что *поляры* (в F) *множеств из* $\mathfrak{S}$ *образуют фундаментальную систему окрестностей нуля* для этой топологии.

Теорема 2 (Макки). *Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Для того чтобы отделимая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}$ в F согласовалась с двойственностью между F и G, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{T}$ было $\mathfrak{S}$-топологией для некоторого покрывающего G множества $\mathfrak{S}$ уравновешенных выпуклых множеств, компактных в слабой топологии $\sigma(G, F)$*

Докажем сначала *необходимость* условия теоремы. Предположим, что G — сопряженное к F, наделенному отделимой локально выпуклой топологией $\mathfrak{T}$. Пусть $\mathfrak{V}$ — инвариантная относительно гомотетий фундаментальная система замкнутых (в $\mathfrak{T}$) уравновешенных выпуклых окрестностей нуля пространства F; для каждого $V \in \mathfrak{V}$ имеем $V = V^{\circ\circ}$ (следствие 2 предложения 4); следовательно, $\mathfrak{V}$ — фундаментальная система окрестностей нуля для $\mathfrak{S}$-топологии, определяемой множеством $\mathfrak{S}$ поляр V° всевозможных множеств из $\mathfrak{V}$; при этом множества V° *компактны* в топологии $\sigma(G, F)$ (предложения 1 и 2); кроме того, $\mathfrak{S}$ покрывает G, ибо для любого $y \in G$ из непрерывности формы $x \to \langle x, y\rangle$ на F вытекает существование окрестности $W \in \mathfrak{V}$ такой, что $|\langle x, y\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in W$, т. е. $y \in W$.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть, таким образом, $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства G, образованное уравновешенными

выпуклыми множествами, компактными в топологии $\sigma(G, F)$; не изменяя этой $\mathfrak{S}$-топологии, всегда можно предполагать, что образы множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях, равно как и уравновешенные выпуклые оболочки любых конечных наборов множеств из $\mathfrak{S}$, также принадлежат $\mathfrak{S}$ (гл. III, § 3, n° 1); при этом каждая такая оболочка компактна в топологии $\sigma(G, F)$ (гл. II, § 4, предложение 1). Так как множества из $\mathfrak{S}$ ограниченны в топологии $\sigma(G, F)$ (гл. III, § 2, предложение 3), то $\mathfrak{S}$-топология $\mathfrak{T}$ согласуется со структурой векторного пространства в F (гл. III, § 3, n° 1); кроме того, эта топология локально выпукла и поляры K° в F множеств $K \in \mathfrak{S}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$; наконец, $\mathfrak{T}$ отделима, поскольку $\mathfrak{S}$ покрывает G (гл. III, § 3, предложение 2).

Пусть теперь F' — пространство, сопряженное к F, наделенному топологией $\mathfrak{T}$. Так как каждое конечное множество из G содержится в некотором множестве из $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{T}$ *мажорирует* топологию $\sigma(F, G)$ и, следовательно, G можно рассматривать как векторное подпространство в F' (§ 1, предложение 1). Докажем, что $G = F'$. Действительно, пусть $x' \in F'$; из непрерывности x' вытекает существование множества $K \in \mathfrak{S}$ такого, что $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ для каждого $x \in K^\circ$, что означает, что x' принадлежит поляре K_1 множества K° *в* F'. Но K_1 есть замыкание K в F' в топологии $\sigma(F', F)$ (§ 1, предложение 3); так как $\sigma(F', F)$ индуцирует в G топологию $\sigma(G, F)$, то K компактно и потому замкнуто в F' в топологии $\sigma(F', F)$, а, следовательно, $K = K_1$. Тем самым $x' \in G$, и теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы отделимая локально выпуклая топология* $\mathfrak{T}$ *в* F *согласовалась с двойственностью между* F *и* G, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{T}$ *мажорировала топологию* $\sigma(F, G)$ *и мажорировалась топологией* $\tau(F, G)$ *равномерной сходимости на всех уравновешенных выпуклых множествах из* G, *компактных в топологии* $\sigma(G, F)$.

Сформулированное условие, очевидно, необходимо в силу теоремы 2. Оно достаточно, ибо если $\mathfrak{T}$ мажорирует топологию $\sigma(F, G)$ и мажорируется топологией $\tau(F, G)$, то пространство F', сопряженное к F при топологии $\mathfrak{T}$, содержит пространство F'_1, сопряженное к F при топологии $\sigma(F, G)$, и содержится в пространстве F'_2, со-

пряженном к F при топологии $\tau(F, G)$, так что справедливость утверждения вытекает из того, что $F_1' = F_2' = G$.

$\tau(F, G)$ называется *топологией Макки* (соответствующей двойственности между F и G).

Предложение 1 показывает, что топология Макки $\tau(F, G)$ *характеризуется* следующим свойством: для того чтобы *выпуклое* множество в G было равностепенно непрерывным при наделении F топологией $\tau(F, G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно компактно в слабой топологии $\sigma(G, F)$ (см. упражнение 3). В частности, в силу теоремы 1 имеем:

Предложение 5. *Если отделимое локально выпуклое пространство E бочечно, то топология Макки $\tau(E, E')$ совпадает с исходной топологией в E.*

4. Множества, ограниченные в ослабленной топологии

Теорема 3 (Макки). *Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Для всех отделимых локально выпуклых топологий в F, согласующихся с двойственностью между F и G, ограниченные множества — одни и те же.*

Действительно, множество $\mathfrak{T}$ всех слабо компактных уравновешенных выпуклых множеств из G образовано множествами, *полными* в топологии $\sigma(G, F)$; поэтому каждое множество M из F, ограниченное в слабой топологии $\sigma(F, G)$, ограниченно и в $\mathfrak{T}$-топологии (гл. III, § 3, теорема 1), т. е. в топологии Макки $\tau(F, G)$; в силу следствия теоремы 2, отсюда и вытекает справедливость утверждения теоремы.

Следствие. *Каждое множество в отделимом локально выпуклом пространстве E, ограниченное в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$, ограниченно и в исходной топологии.*

Основываясь на этом, можно поэтому говорить просто об *ограниченных* множествах в E, не уточняя — в какой топологии. Если E *квазиполно* в ослабленной топологии, то оно квазиполно и в исходной: это вытекает из предыдущего и предложения 8 § 1 гл. I, поскольку каждая замкнутая выпуклая окрестность нуля для исходной

топологии замкнута в ослабленной топологии (следствие 2 предложения 4).

Предложение 6. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство. Если E метризуемо, то топология Макки $\tau(E, E')$ совпадает с исходной топологией в E.*

Действительно, пусть T — уравновешенная выпуклая окрестность нуля для топологии $\tau(E, E')$. Так как T, в силу теоремы 3, поглощает множества, ограниченные в исходной топологии $\mathfrak{T}$, то все сводится к доказательству того, что *каждое выпуклое уравновешенное множество M в E, поглощающее все ограниченные множества, есть окрестность нуля для $\mathfrak{T}$*. Будем рассуждать от противного. Пусть (V_n) — убывающая фундаментальная система уравновешенных окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$, и предположим, что ни одно из множеств $\frac{1}{n}V_n$ не содержится в M. Пусть x_n — точка из $\frac{1}{n}V_n$, не принадлежащая M; тогда последовательность (nx_n) сходится к нулю в топологии $\mathfrak{T}$ и, однако, M не поглощает множества точек этой последовательности, вопреки предположению. Тем самым предложение доказано.

Замечание. Этот результат доказывает также, что линейное отображение u пространства E в локально выпуклое пространство F, переводящее каждое ограниченное множество из E в ограниченное множество в F, *непрерывно*. Действительно, какова бы ни была уравновешенная выпуклая окрестность нуля V в F, $\overset{-1}{u}(V)$ поглощает все ограниченные множества из E и, следовательно, есть окрестность нуля в E (см. гл. III, § 2, упражнения 14 и 15).

5. Характеризация слабо непрерывных линейных форм на сопряженном пространстве

Если E — отделимое локально выпуклое пространство, то каждая линейная форма на сопряженном пространстве E', непрерывная в слабой топологии, однозначно представляется в виде $x' \to \langle x, x' \rangle$, где $x \in E$ (§ 1, предложение 1). В некоторых случаях эти формы можно охарактеризовать свойством, менее ограничительным, чем слабая непрерывность:

Теорема 4 (Банах). *Пусть E — полное отделимое локально выпуклое пространство. Для того чтобы линейная форма на*

сопряженном пространстве E' была непрерывной в слабой топологии $\sigma(E', E)$, достаточно, чтобы было непрерывно (в топологии $\sigma(E', E)$) ее сужение на каждое равностепенно непрерывное множество из E'.

Пусть $F \subset E'^*$ — множество всех линейных форм на E', сужение которых на каждое равностепенно непрерывное множество из E' непрерывно в топологии $\sigma(E', E)$. Ясно, что F — векторное подпространство в E'^*, содержащее E и находящееся в двойственности с E'. Пусть $\mathfrak{S}'$ — множество всех равностепенно непрерывных слабо замкнутых уравновешенных выпуклых подмножеств пространства E'. Каждое множество $B' \in \mathfrak{S}'$ компактно в топологии $\sigma(E', E)$ (предложение 2) и так как для каждой линейной формы $u \in F$ ее сужение на B' по предположению непрерывно, то $u(B')$ *ограниченно* в теле скаляров; это показывает, что $\mathfrak{S}'$-топология $\mathfrak{T}$ согласуется со структурой векторного пространства в F (гл. III, § 3, предложение 1). Ясно, кроме того, что топология $\mathfrak{T}$ — локально выпуклая и отделимая и что поляры в F множеств из $\mathfrak{S}'$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathfrak{T}$ (поскольку множество $\mathfrak{S}'$ — фильтрующееся по отношению $\subset$ и инвариантно относительно гомотетий). Но в силу предложения 1, след на E поляры множества $B' \in \mathfrak{S}'$ в F есть окрестность нуля для исходной топологии в E; обратно, если V — уравновешенная замкнутая выпуклая окрестность нуля для исходной топологии в E, то ее поляра B' в E' принадлежит $\mathfrak{S}'$, и так как поляра множества B' в E совпадает с V (следствие 2 предложения 4), то V есть след на E поляры множества B' в F. Таким образом, мы видим, что топология, индуцируемая в E топологией $\mathfrak{T}$, совпадает с исходной топологией в E. А так как E предположено полным в этой последней топологии, то оно *замкнуто* в F в топологии $\mathfrak{T}$.

Покажем теперь, что E' — сопряженное к F, наделенному топологией $\mathfrak{T}$. В силу теоремы 2, достаточно доказать, что множества $B' \in \mathfrak{S}'$ компактны *в топологии* $\sigma(E', F)$. А так как они компактны в $\sigma(E', E)$, то достаточно показать, что $\sigma(E', E)$ и $\sigma(E', F)$ индуцируют в B' одну и ту же топологию. Но топология, индуцируемая в B' топологией $\sigma(E', F)$, есть слабейшая топология, при которой непрерывны сужения линейных форм $u \in F$ на B'; поэтому она в силу предположения мажорируется топологией, индуцируемой в B' топологией $\sigma(E', E)$; но она также мажорирует эту последнюю, поскольку $E \subset F$; тем самым наше утверждение доказано.

Если бы теперь $E \neq F$, то в F существовала бы замкнутая (в топологии $\mathfrak{T}$) гиперплоскость, содержащая E (гл. II, § 3, следствие 3 предложения 4), и, следовательно, нашелся бы элемент $x' \in E'$, ортогональный к E и $\neq 0$, что абсурдно.

Замечание. Если в E содержится тотальное счетное множество, то каждое равностепенно непрерывное множество из E' метризуемо в слабой топологии (предложение 3); поэтому для установления слабой непрерывности линейной формы u на E' достаточно установить, что для каждой *последовательности* (x'_n), слабо сходящейся к какому-то пределу x', $\lim\limits_{n\to\infty} u(x'_n) = u(x')$.

6. Характеризация слабо замкнутых выпуклых множеств в сопряженном к пространству Фреше

Предложение 7. *Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство и $\mathfrak{S}$ — множество его подмножеств, образованных точками всевозможных последовательностей, стремящихся к нулю. $\mathfrak{S}$-топология в E' есть сильнейшая из топологий $\mathfrak{T}$, при которых непрерывны все переносы и которые индуцируют на каждом равностепенно непрерывном множестве из E' ту же топологию, что и слабая топология $\sigma(E', E)$.*

Ясно, что рассматриваемая $\mathfrak{S}$-топология мажорирует топологию $\sigma(E', E)$, а так как каждое множество из $\mathfrak{S}$ относительно компактно, то топологии, индуцируемые $\mathfrak{S}$-топологией и топологией $\sigma(E', E)$ на равностепенно непрерывных множествах из E', совпадают (гл. III, § 3, предложение 5). Обратно, пусть $\mathfrak{T}$ — топология в E', обладающая свойствами, указанными в формулировке предложения, и W' — множество, открытое в $\mathfrak{T}$ и содержащее 0. Мы установим существование множества $S \in \mathfrak{S}$, для которого $W' \supset S^\circ$, чем предложение и будет полностью доказано.

Пусть (U_n) — убывающая фундаментальная последовательность замкнутых уравновешенных выпуклых окрестностей нуля пространства E. Наше утверждение будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 1. *Для каждого целого $n \geqslant 0$ существует конечное множество $B_n \subset U_n$ такое, что все множества $U_n^\circ \cap A_n^\circ$, где $A_n = \bigcup\limits_{p=0}^{n-1} B_p$, содержатся в W'.*

Действительно, предположим, что эта лемма доказана. Тогда объединение S множеств A_n принадлежит $\mathfrak{S}$, и так как $S^\circ \subset A_n^\circ$ для каждого n, то $S^\circ \cap U_n^\circ \subset W'$ для каждого n; а поскольку объединение множеств U_n° есть всё E', то и $S^\circ \subset W'$.

Доказательство леммы проведем индукцией по n. Достаточно показать, что если A_n — конечное множество из E, удовлетворяющее условию $U_n^\circ \cap A_n^\circ \subset W'$, то существует конечное множество $B_n \subset U_n$ такое, что $U_{n+1}^\circ \cap (A_n \cup B_n)^\circ \subset W'$. Рассуждая от противного, предположим, что никакого конечного множества B_n, обладающего этим свойством, не существует, и пусть $K_n' = U_{n+1}^\circ \cap \complement W'$. Тогда пересечение $(A_n \cup B)^\circ \cap K_n' = A_n^\circ \cap B^\circ \cap K_n'$ не пусто ни для какого конечного множества B из U_n. Поэтому множества $A_n^\circ \cap B^\circ \cap K_n'$, где B пробегает всевозможные конечные подмножества из U_n, образуют базис фильтра в K_n'. Но так как топология, которую $\mathfrak{T}$ индуцирует в U_{n+1}°, по предположению, совпадает с топологией, которую индуцирует $\sigma(E', E)$, то K_n' *слабо компактно* (предложение 2) и, значит, множества $A_n^\circ \cap B^\circ \cap K_n'$, будучи слабо замкнутыми, имеют общую точку x_0'. Так как U_n есть объединение множества всех своих конечных подмножеств, то x_0' должно принадлежать множеству $A_n^\circ \cap U_n^\circ \cap K_n'$, которое, однако, пусто по предположению. Полученное противоречие и завершает доказательство предложения 7.

Следствие 1. *Указанная $\mathfrak{S}$-топология совпадает с топологией компактной сходимости.*

Действительно, предложение 5 § 3 гл. III показывает, что топология компактной сходимости индуцирует в каждом равностепенно непрерывном множестве из E' ту же топологию, что и $\sigma(E', E)$; тем самым, в силу предложения 7, топология компактной сходимости мажорируется указанной $\mathfrak{S}$-топологией. С другой стороны, она, очевидно, мажорирует эту $\mathfrak{S}$-топологию, поскольку множества из $\mathfrak{S}$ относительно компактны.

Следствие 2. *Для того чтобы множество A' в пространстве E', сопряженном к метризуемому локально выпуклому пространству E, было замкнуто в топологии $\mathfrak{T}_c$ компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы его пересечение $A' \cap M'$ с каждым равностепенно непрерывным множеством M' из E'*

было замкнуто в топологии, индуцируемой в M' топологией $\sigma(E', E)$.

Условие необходимо, поскольку $\mathcal{T}_c$ и $\sigma(E', E)$ индуцируют в M' одну и ту же топологию (гл. III, § 3, предложение 5). Чтобы убедиться в его достаточности, рассмотрим множество $\mathfrak{U}$ всех подмножеств U' пространства E', пересечение которых $U' \cap M'$ с каждым равностепенно непрерывным множеством M' из E' открыто в топологии, индуцируемой в M' топологией $\sigma(E', E)$. Ясно, что $\mathfrak{U}$ есть множество всех открытых множеств для сильнейшей из топологий в E', обладающих свойствами, указанными в предложении 7. Тем самым, в силу следствия 1, эта топология совпадает с $\mathcal{T}_c$, и утверждение доказано.

Теорема 5 (Банах). *Для того чтобы выпуклое множество A' в пространстве E', сопряженном к пространству Фреше E, было замкнуто в слабой топологии $\sigma(E', E)$, достаточно, чтобы $A' \cap U^\circ$ было замкнуто в $\sigma(E', E)$ для любой окрестности нуля U пространства E.*

Действительно, следствие 2 предложения 7 показывает, что A' замкнуто в топологии компактной сходимости $\mathcal{T}_c$. Так как E полно, то замкнутая выпуклая оболочка каждого его компактного подмножества компактна в исходной топологии и тем более — в мажорируемой ею топологии $\sigma(E, E')$. Теорема 2 показывает тогда, что топология $\mathcal{T}_c$ в E' *согласуется* с двойственностью между E' и E. Так как множество A' выпукло и замкнуто в $\mathcal{T}_c$, то в силу предложения 4 оно замкнуто тогда и в топологии $\sigma(E', E)$.

Применив этот результат к гиперплоскостям из E' и приняв во внимание связь между замкнутыми гиперплоскостями и непрерывными линейными формами (гл. I, § 2, теорема 1), мы получим (для пространств Фреше) другое доказательство теоремы 4.

7. Сопряженное к подпространству; сопряженное к факторпространству

Предложение 8. *Пусть M — векторное подпространство отделимого локально выпуклого пространства E и M° — ортогональное к M подпространство пространства E'. Ослабленная топология, ассоциированная с топологией, индуцируемой в M исход-*

ной топологией $\mathfrak{T}$ пространства E, совпадает с топологией $\sigma(M, E'/M^\circ)$, индуцируемой в M ослабленной топологией $\sigma(E, E')$.

Действительно, из теоремы Хана — Банаха (гл. II, § 5, теорема 1 и § 6, теорема 1) вытекает, что каждая линейная форма на M, непрерывная в топологии, которую индуцирует $\mathfrak{T}$, есть сужение на M линейной формы на E, непрерывной в топологии $\mathfrak{T}$, откуда и следует справедливость утверждения (§ 1, предложение 6).

Предложение 9. *Пусть M — замкнутое векторное подпространство отделимого локально выпуклого пространства E. Ослабленная топология, ассоциированная с фактортопологией исходной топологии $\mathfrak{T}$ пространства E по M совпадает с фактортопологией $\sigma(E/M, M^\circ)$ ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ по M.*

Действительно, $u \to u \circ \varphi$, где φ — каноническое отображение E на E/M, есть (алгебраический) изоморфизм пространства, сопряженного к E/M (наделенному фактортопологией топологии $\mathfrak{T}$ по M), на подпространство M° в E', ортогональное к M. Затем применяем предложение 7 § 1.

8. Сопряженное к произведению

Предложение 10. *Пространство E', сопряженное к произведению $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ локально выпуклых пространств, канонически отождествимо с (алгебраической) прямой суммой семейства $(E'_\iota)_{\iota \in I}$, поскольку каждая непрерывная линейная форма на E однозначно представляется в виде $x \to \sum_{\iota \in I} \langle \mathrm{pr}_\iota x, x'_\iota \rangle$, где $x'_\iota \in E'_\iota$ и $x'_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов. При этом ослабленная топология $\sigma(E, E')$ есть произведение ослабленных топологий $\sigma(E_\iota, E'_\iota)$.*

Когда I конечно, первая часть предложения очевидна; действительно, тогда E можно отождествить с прямой суммой пространств E_ι и каждое $x \in E$ представить в виде $x = \sum_{\iota \in I} \mathrm{pr}_\iota x$, так что каждая непрерывная линейная форма u на E представится в виде $u = \sum_{\iota \in I} u_\iota \circ \mathrm{pr}_\iota$, где u_ι — сужение u на E_ι, очевидно, непрерывное. Пусть теперь I произвольно и u — непрерывная линейная форма на E. Тогда в E существует окрестность нуля V, являющаяся элементарным множе-

ством (Общ. топ., Рез., § 7, п° 5) и такая, что $|u(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in V$. Но $V = \prod_{\iota \in I} V_\iota$, где $V_\iota \neq E_\iota$ лишь для индексов ι, принадлежащих некоторому конечному множеству $H \subset I$. Положим $M = \prod_{\iota \in H} E_\iota$, $N = \prod_{\iota \in CH} E_\iota$ и будем рассматривать E как прямую сумму подпространств M и N. Пусть $x \in N$. Так как $\lambda x \in N \subset V$ и, значит, $|\lambda u(x)| \leqslant 1$ для любого скаляра λ, то $u(x) = 0$. Следовательно, $u(x) = u(\mathrm{pr}_H x)$, и мы приходим к первому случаю. Последнее утверждение есть следствие предложения 8 § 1.

Следствие. *Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств, E — векторное пространство и f_ι для каждого $\iota \in I$ — линейное отображение E в F_ι. Если наделить E слабейшей из топологий, при которых непрерывны все f_ι *), то каждая непрерывная линейная форма на E будет представляться в виде $x \to \sum_{\iota \in I} u_\iota(f_\iota(x))$, где u_ι — непрерывная линейная форма на F_ι, причем $u_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов ι.*

Действительно, пусть $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$. Как мы знаем, топология, которой наделено E, есть прообраз топологии подпространства $f(E)$ произведения $F = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ относительно отображения f (гл. I, § 1, предложение 15). Так как каждая окрестность нуля в E имеет вид $f^{-1}(V)$, где V — окрестность нуля в $f(E)$, то каждая непрерывная линейная форма на E представляется в виде $u \circ f$, где u — непрерывная линейная форма на $f(E)$. Но в силу теоремы Хана — Банаха (гл. II, § 5, теорема 1 и § 6, теорема 1), u есть сужение на $f(E)$ некоторой непрерывной линейной формы на F, и утверждение следствия доказано.

9. Сопряженное к пространству непрерывных линейных отображений

Предложение 11. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Если наделить пространство $L(E, F)$ топологией простой сходимости* (гл. III, § 3, п° 1), *то каждая*

*) Эта топология не обязательно отделима; мы явно указываем на это обстоятельство в согласии с условием, принятым в начале параграфа.

линейная форма на $L(E, F)$ *будет представляться в виде* $u \to \sum_{i=1}^{n} \langle u(x_i), y'_i \rangle$, *где* x_i (соотв. y'_i) — *элементы из* E (соотв. F').

Действительно, топология простой сходимости в $L(E, F)$ есть слабейшая из топологий, при которых линейные отображения $u \to u(x)$ пространства $L(E, F)$ в F непрерывны для всех $x \in E$. Поэтому справедливость предложения непосредственно вытекает из следствия предложения 10.

Следствие. *Существует однозначно определенный (алгебраический) изоморфизм тензорного произведения* $E \otimes F'$ *на сопряженное к пространству* $L(E, F)$, *наделенному топологией простой сходимости, ставящее в соответствие каждому тензорному произведению* $x \otimes y'$ *линейную форму* $u \to \langle u(x), y' \rangle$.

Действительно, пусть $f_{x, y'}$ для каждой пары $(x, y') \in E \times F'$ — непрерывная линейная форма $u \to \langle u(x), y' \rangle$ на $G = L(E, F)$. Очевидно, $(x, y') \to f_{x, y'}$ есть билинейное отображение $E \times F'$ в G'. Следовательно (Алг., гл. III, § 1, п° 2, Схолия), существует однозначно определенное линейное отображение φ тензорного произведения $E \otimes F'$ в G' такое, что $\varphi(x \otimes y') = f_{x, y'}$. Предложение 11 показывает, что φ сюръективно; покажем, что φ инъективно. Действительно, пусть $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — свободная система точек из E и $(b'_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — свободная система точек из F'; все сводится к доказательству того, что если $\sum_{i, j} \lambda_{ij} \langle u(a_i), b'_j \rangle = 0$ для *каждого* линейного отображения $u \in G$, то необходимо $\lambda_{ij} = 0$ для всех пар (i, j). Пусть $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — свободная система точек из F такая, что $\langle b_j, b'_k \rangle = \delta_{jk}$ (Алг., гл. II, § 4, теорема 2). Покажем, что для каждой пары (i, j) существует непрерывное линейное отображение u пространства E в F такое, что $u(a_i) = b_j$ и $u(a_h) = 0$ для всех $h \neq i$; соотношение $\sum_{h, k} \lambda_{hk} \langle u(a_h), b'_k \rangle = 0$ даст тогда $\lambda_{ij} = 0$, чем утверждение следствия и будет доказано. Но в силу теоремы Хана — Банаха, на E существует непрерывная линейная форма x' такая, что $\langle a_i, x' \rangle = 1$ и $\langle a_h, x' \rangle = 0$ для всех $h \neq i$, и достаточно принять $u(x) = \langle x, x' \rangle b_j$.

Сопряженное к пространству $L(E, F)$, наделенному топологией простой сходимости, обычно отождествляют с тензорным произведением $E \otimes F'$. Таким образом, множества, определяемые конечными

системами неравенств $|\langle u(a_i), b'_j\rangle| \leqslant 1$ $(a_i \in E,\ b'_j \in F')$, образуют для слабой топологии $\sigma(L(E, F), E \otimes F')$ в $L(E, F)$ фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология в $L(E, F)$ вообще слабее топологии простой сходимости, но замыкания *выпуклых* множеств в $L(E, F)$ — *одни и те же* в обеих топологиях (предложение 4).

Упражнения. 1. Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства и $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств пространства E. Для того чтобы $\mathfrak{S}$-топология в $L(F, F)$ согласовалась со структурой векторного пространства, необходимо (и достаточно; см. гл. III, § 3, предложение 1), чтобы каждое множество из $\mathfrak{S}$ было ограниченно в E. [Использовать теорему 3.]

*2) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и $\mathfrak{U}'$, для каждого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ из E, — фильтр, базис которого образуют выпуклые оболочки множеств из $\mathfrak{U}$. Показать, что для того, чтобы точка пространства E была пределом ультрафильтра $\mathfrak{U}$ в ослабленной топологии, необходимо и достаточно, чтобы она была точкой прикосновения для $\mathfrak{U}'$ в исходной топологии. [Использовать предложение 4, а также упражнение 9 § 1.]

б) Пусть E — векторное пространство, A — выпуклое множество в E, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ — отделимые локально выпуклые топологии в E и $\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}'_2$ — соответствующие ослабленные топологии. Показать, что если топология, которую $\mathfrak{T}_1$ индуцирует в A, мажорирует топологию, индуцируемую в A топологией $\mathfrak{T}_2$, то и топология, которую $\mathfrak{T}'_1$ индуцирует в A, мажорирует топологию, индуцируемую в A топологией $\mathfrak{T}'_2$. [Использовать а) и упражнение 9 из Общ. топ., гл. I, § 5 ([24]).]

*3) Пусть F — прямая сумма $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ и G — пространство $L^1(\mathbf{N})$. F и G приводятся в двойственность билинейной формой $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \eta_n$, где $x = (\xi_n) \in F$ и $y = (\eta_n) \in G$.

а) Показать, что в F каждое выпуклое множество K, компактное в топологии $\sigma(F, G)$, конечномерно. [В противном предположении пусть (n_k) — строго возрастающая последовательность целых чисел > 0 и (a_k) — последовательность точек из K такая, что у точки a_k составляющие с индексами $> n_k$ равны нулю, но составляющая с индексом n_k отлична от нуля. Показать, что существует последовательность (t_k) чисел > 0 такая, что $\sum_{k=0}^{\infty} t_k < +\infty$ и у точки $\sum_{k=0}^{\infty} t_k a_k$ пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ ограниченных последовательностей вещественных чисел все составляющие с индексами n_i отличны от нуля. Вывести отсюда, что последовательность частичных сумм $s_p = \sum_{k=0}^{p} t_k a_k$ не может иметь слабой предельной точки в F.]

б) Показать, что в F существуют бесконечномерные слабо компактные множества. [Принять во внимание, что G — сопряженное к F при топологии, индуцированной в F из нормированного пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$; см. § 1, упражнение 1а.]

в) Вывести из а) и б), что $\tau(G, F) = \sigma(G, F)$, но $\tau(G, F)$ отлично от топологии равномерной сходимости на слабо компактных множествах из F.

*4) а) Пусть E — квазиполное ограниченно замкнутое (гл. III, § 2, упражнение 12) отделимое локально выпуклое пространство. Для того чтобы топологии $\tau(E', E)$ и $\sigma(E', E)$ в сопряженном пространстве E' совпадали, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E была сильнейшей локально выпуклой топологией. [Используя предложение 4 § 2 гл. III, показать, что каждое ограниченное множество в E конечномерно.]

б) Пусть E — бесконечномерное метризуемое локально выпуклое пространство. Для того чтобы топология $\tau(E, E')$ в E совпадала с $\sigma(E, E')$, необходимо и достаточно, чтобы E было изоморфно всюду плотному подпространству пространства $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (соотв. $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$). [Принять во внимание, что в E' существует счетная фундаментальная система равностепенно непрерывных множеств, каждое из которых конечномерно, и, следовательно, E' обладает счетным базисом.]

5) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности и M — замкнутое векторное подпространство в F (в топологиях, согласующихся с двойственностью между F и G).

а) Показать, что фактортопология $\tau(F, G)$ по M совпадает с $\tau(F/M, M^\circ)$. [Использовать следствие предложения 3 § 1.]

б) Показать, что $\tau(M, G/M^\circ)$ мажорирует топологию, индуцируемую в M топологией $\tau(F, G)$; для того чтобы эти топологии совпадали, необходимо и достаточно, чтобы каждое уравновешенное выпуклое множество в G/M°, компактное в слабой топологии $\sigma(G/M^\circ, M)$, было образом уравновешенного выпуклого множества из G, компактного в топологии $\sigma(G, F)$, при каноническом отображении G на G/M°. [См. гл. V, § 2, упражнение 12.]

в) Пусть N — векторное подпространство в F, плотное в топологиях, согласующихся с двойственностью между F и G. Показать, что если $\mathscr{T}$ — одна из этих топологий и топология, индуцируемая ею в N, совпадает с $\tau(N, G)$, то $\mathscr{T}$ совпадает с $\tau(F, G)$. [См. упражнение 6г.]

6) Пусть $((F_\iota, G_\iota))_{\iota \in I}$ — семейство пар векторных пространств в двойственности. Произведение $F = \prod_\iota F_\iota$ векторных пространств F и прямая сумма G векторных пространств G_ι приводятся в двойственность билинейной формой $\langle (x_\iota), (y_\iota) \rangle = \sum_\iota \langle x_\iota, y_\iota \rangle$, и $\sigma(F, G)$ есть произведение топологий $\sigma(F_\iota, G_\iota)$ (§ 1, предложение 8).

а) Показать, что $\tau(G, F)$ есть прямая сумма топологий $\tau(G_\iota, F_\iota)$ *). Вывести отсюда, что топология $\tau(F, G)$ есть произведение топологий $\tau(F_\iota, G_\iota)$. [Использовать теорему 3, а также упражнение 10 § 2 гл. III.]

б) Вывести из а), что сопряженное к топологической прямой сумме семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ отделимых локально выпуклых пространств изоморфно (алгебраически) произведению семейства (E'_ι) сопряженных к пространствам E_ι.

в) Пусть E — векторное пространство и E^* — его алгебраическое сопряженное. Вывести из а), что $\tau(E, E^*)$ есть сильнейшая локально выпуклая топология в E, а $\tau(E^*, E)$ совпадает с $\sigma(E^*, E)$.

г) Пусть E — бесконечномерное векторное пространство, E^* — его алгебраическое сопряженное и E^{**} — алгебраическое сопряженное к E^*. Показать, что E плотно в E^{**} во всех топологиях, согласующихся с двойственностью между E^{**} и E^*, но топология, которую $\tau(E^{**}, E^*)$ индуцирует в E, отлична от $\tau(E, E^*)$. [Использовать в).]

°7) Пусть $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство отделимых локально выпуклых пространств, E — векторное пространство и f_α, для каждого $\alpha \in A$, — линейное отображение E_α в E. Рассмотрим в E сильнейшую из локально выпуклых топологий $\mathfrak{T}$, при которых непрерывны все f_α (гл. II, § 2, п° 2); предположим, что она отделима, и обозначим через E' сопряженное к пространству E, наделенному этой топологией $\mathfrak{T}$. Показать, что если топология каждого E_α ($\alpha \in A$) совпадает с $\tau(E_\alpha, E'_\alpha)$, то $\mathfrak{T}$ совпадает с $\tau(E, E')$. [Использовать предложение 7 § 4.]

8) Пусть F и G — вещественные векторные пространства в двойственности.

а) Пусть A — слабо компактное выпуклое множество в F, не содержащее начала, и C — конус с вершиной 0, порожденный этим множеством. Показать, что конус C° обладает в топологии $\tau(G, F)$ внутренней точкой.

б) Обратно, пусть C — выпуклый конус в F с вершиной 0, обладающий в топологии $\tau(F, G)$ внутренней точкой. Показать, что в G существует слабо замкнутая гиперплоскость H, не содержащая начала и такая, что $H \cap C^\circ$ слабо компактно.

*9) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство. Доказать равносильность следующих утверждений: α) E бочечно; β) каждое слабо ограниченное множество в E' равностепенно непрерывно; γ) каждое слабо ограниченное множество в E' относительно слабо компактно, а топология в E совпадает с $\tau(E, E')$.

б) Показать, что произведение любого семейства бочечных пространств бочечно. [Свести к случаю отделимых бочечных пространств и использовать а), предложение 7, теорему 3, приведенное выше упражнение 6 и упражнение 10 § 2 гл. III.]

---

*) Напротив, $\sigma(G, F)$ не есть вообще прямая сумма топологий $\sigma(G_\iota, F_\iota)$ как показывает случай, когда $F_\iota = G_\iota = \mathbf{R}$ и I бесконечно. [См. § 3, упражнение 16 и § 1, упражнение 11в.]

в) Получить из б) пример бочечного пространства F, обладающего замкнутым подпространством E, не являющимся бочечным и, следовательно, не имеющим дополнения в F. [Использовать предложение 7 § 5 гл. II и упражнение 5 § 1 гл. III.]

10) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. *Загреждением* пространства G в алгебраическом сопряженном F^* к F назовем множество всех линейных форм x' на F, ограниченных на каждом множестве из F, ограниченном в топологии $\sigma(F, G)$; это — векторное подпространство $\tilde{G}$ в F^*, сопряженное к пространству F, наделенному топологией ограниченно замкнутого пространства, ассоциированной с любой из топологий в F, согласующихся с двойственностью между F и G (гл. III, § 2, упражнение 13). Если $\tilde{G} = G$, то G назовем *загражденным* в F^*.

а) Пусть M — замкнутое векторное подпространство в F (в топологии $\sigma(F, G)$). Показать, что если G — загражденное в F^*, то сопряженное к факторпространству F/M, наделенному топологией $\sigma(F/M, M^\circ)$, — загражденное в алгебраическом сопряженном к F/M.

б) Для того чтобы отделимое локально выпуклое пространство E было ограниченно замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его топология совпадала с $\tau(E, E')$, а E' было загражденным в E^*.

*11) а) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство отделимых локально выпуклых пространств и F — прямая сумма пространств E_ι, наделенная топологией, определенной в упражнении 7 § 1 гл. I. Показать, что пространство, сопряженное к F, канонически изоморфно подпространству произведения $\prod_{\iota \in I} E'_\iota$ сопряженных пространств E'_ι, образованному семействами (x'_ι), в которых $x'_\iota \neq 0$ не более чем для счетного множества индексов. [Пусть V_ι — произвольная окрестность нуля в E_ι. Показать, что если $x'_\iota \neq 0$ для несчетного бесконечного множества индексов, то существует число $\alpha > 0$ такое, что в несчетном бесконечном множестве окрестностей V_ι содержатся элементы x_ι, для которых $\langle x_\iota, x'_\iota \rangle \geqslant \alpha$, и заключить отсюда, что (x'_ι) не может принадлежать F'.]

б) Показать, что если I несчетно, то F' — не загражденное в F^* (упражнение 10).

12) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство.

а) Для того чтобы в сопряженном пространстве E' существовало поглощающее слабо ограниченное множество, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E мажорировалась нормированной топологией. [См. § 1, упражнение 10.]

б) Для того чтобы в E' существовало тотальное в слабой топологии равностепенно непрерывное множество, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E мажорировала нормированную топологию.

в) Для того чтобы в E' существовало поглощающее равностепенно непрерывное множество, необходимо и достаточно, чтобы топология в E могла быть определена одной нормой.

*13) а) Пусть в пространстве E', сопряженном к отделимому локально выпуклому пространству E, существует счетное множество, всюду плотное в топологии $\sigma(E', E)$. Показать, что тогда топология пространства E мажорирует метризуемую локально выпуклую топологию.

б) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности, причем в G существует счетное множество, всюду плотное в топологии $\sigma(G, F)$, и пусть (x_n) — последовательность точек из F, каждая подпоследовательность которой обладает предельной точкой в F в топологии $\sigma(F, G)$. Показать, что тогда некоторая подпоследовательность последовательности (x_n) сходится к точке пространства F в топологии $\sigma(F, G)$ („*теорема Шмульяна*"). [Пусть (b_n) — слабо плотная последовательность в G; выбрать из (x_n) подпоследовательность (y_n) так, чтобы $\langle y_n, b_p\rangle$ сходилось к пределу для каждого индекса p, и показать, что последовательность (y_n) имеет лишь одну предельную точку в слабой топологии $\sigma(F, G)$.]

в) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство или строгий индуктивный предел (гл. II, § 2, n° 5) последовательности метризуемых локально выпуклых пространств. Показать, что если (x_n) — последовательность точек из E, каждая подпоследовательность которой обладает предельной точкой в E в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$, то (x_n) содержит подпоследовательность, сходящуюся в этой топологии к некоторой точке пространства E. [Используя предложение 6 § 2 гл. III, свести к случаю метризуемого E и далее — к случаю, когда E — пространство счетного типа; в заключение использовать а) и б).]

г) Пусть E — банаховское пространство $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ (не являющееся пространством счетного типа; гл. I, § 2, упражнение 8), и пусть e'_n для каждого целого $n \geqslant 0$ — непрерывная линейная форма на E, относящая каждой последовательности $x = (\xi_n) \in E$ ее n-й член ξ_n. Показать, что последовательность (e'_n) тотальна в сопряженном пространстве E', наделенном топологией $\sigma(E', E)$; кроме того, каждая ее подпоследовательность обладает предельной точкой в E' в топологии $\sigma(E', E)$, но никакая подпоследовательность последовательности (e'_n) не сходится в этой топологии.

*14) а) Пусть K — компактное пространство, H — любое множество в пространстве $\mathscr{C}(K, \mathbf{R})$ всех непрерывных числовых функций на K и f_0 — точка прикосновения множества H в $\mathscr{C}(K, \mathbf{R})$ в топологии $\mathscr{T}_s$ простой сходимости. Показать, что f_0 есть точка прикосновения для некоторого счетного подмножества H_0 из H в топологии $\mathscr{T}_s$. [Показать, что для каждой пары целых чисел m, n существует конечное подмножество $H(m, n)$ множества H, обладающее следующим свойством: для каждых m точек t_k из K $(1 \leqslant k \leqslant m)$ существует $f \in H(m, n)$ такое, что $|f_0(t_k) - f(t_k)| \leqslant \frac{1}{n}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$; для этого использовать непрерывность функций из $\mathscr{C}(K, \mathbf{R})$ и компактность пространства K^m.]

б) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство и H — произвольное множество в E. Показать, что если x_0 — точка прикосновения множества H в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$, то x_0 есть точка прикосновения некоторого его счетного подмножества H_0 в топологии $\tau(E, E')$ *). [Использовать а), приняв во внимание, что E' есть объединение счетного числа множеств, компактных в топологии $\sigma(E', E)$.]

в) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство или строгий индуктивный предел последовательности метризуемых локально выпуклых пространств. Показать, что если H есть множество из E, относительно компактное в топологии $\sigma(E, E')$, и x_0 — его точка прикосновения в этой топологии, то H содержит последовательность точек (x_n), сходящуюся к x_0 в топологии $\sigma(E, E')$. [С помощью предложения 6 § 2 гл. III свести к случаю метризуемого E. Использовать б) для сведения к случаю счетного H, что позволит считать E метризуемым пространством счетного типа; затем применить следствие предложения 3 и упражнение 13 в.]

*15) а) Пусть K — компактное пространство и H — подмножество пространства $\mathbf{R}^K$, образованное из непрерывных функций на K. Предположим, что каждая последовательность функций из H обладает в топологии простой сходимости на K точкой прикосновения, являющейся непрерывной функцией на K. Показать, что замыкание $\overline{H}$ множества H в $\mathbf{R}^K$ компактно и образовано из непрерывных функций на K. [Показать, что если бы $u \in \overline{H}$ не было непрерывно, то существовали бы точка $a \in K$, число $\delta > 0$, последовательность (x_n) точек из K и последовательность (f_m) функций из H, удовлетворяющие следующим условиям: $1°\ |u(x_n) - u(a)| \geqslant \delta$ для каждого n; $2°\ |f_m(x_n) - f_m(a)| \leqslant \frac{\delta}{8}$ для всех $m \leqslant n$; 3) $|u(x_n) - f_m(x_n)| \leqslant \frac{\delta}{8}$ и $|u(a) - f_m(a)| \leqslant \frac{\delta}{8}$ для всех $m \geqslant n+1$ [определить последовательности (f_m) и (x_n) по индукции]. Получить отсюда противоречие, рассматривая предельную точку f последовательности (f_m), являющуюся непрерывной функцией по условию, и предельную точку последовательности (x_n) в K.]

б) Пусть E — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и H — множество в E, каждая последовательность точек которого обладает в E предельной точкой в топологии $\sigma(E, E')$. Показать, что H относительно компактно в E в этой топологии („*теорема Эберлейна*"). [Рассматривая $\hat{E}$ вместо E, свести к случаю полного E. Погрузить E в E'^* и использовать а) и теорему 4.]

в) Пусть I — несчетное множество и E — пространство $\mathbf{R}^{(I)}$, наделенное топологией, определенной в упражнении 7 § 1 гл. I (см. упражнение 11). Показать, что в E' существуют множества H, не относительно компактные в $\sigma(E', E)$ и такие, что каждая последовательность

*) Это (неопубликованное) предложение сообщил нам I. Kaplansky.

точек из H содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из H в топологии $\sigma(E', E)$.

*16) а) Пусть K — компактное пространство и H — выпуклое множество в пространстве $\mathbf{R}^K$, образованное из непрерывных функций на K. Предположим, что каждая убывающая последовательность непустых замкнутых выпуклых подмножеств множества H имеет непустое пересечение. Показать, что замыкание $\overline{H}$ множества H в $\mathbf{R}^K$ компактно и образовано из непрерывных функций на K. [Рассуждать как в упражнении 15а, заменяя f общей точкой убывающей последовательности выпуклых множеств A_m, где A_m — замкнутая в H выпуклая оболочка множества функции f_k с $k \geqslant m$.]

б) Пусть E — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство и H — множество в E такое, что каждая убывающая последовательность его непустых замкнутых выпуклых подмножеств обладает непустым пересечением. Показать, что H относительно компактно в E в топологии $\sigma(E, E')$. [Свести к случаю полного E; считать E погруженным в E'^* и использовать а) и теорему 4.]

17) Пусть E — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство. Показать, что в сопряженном пространстве E' топология компактной сходимости есть сильнейшая из топологий, совместимых с двойственностью между E' и E и индуцирующих в каждом равностепенно непрерывном множестве из E' ту же топологию, что и слабая топология $\sigma(E', E)$. [См. § 1, упражнение 12.]

18) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, A — уравновешенное выпуклое множество в E и u — линейная форма на E. Показать, что если $A \cap u^{-1}(0)$ замкнуто в A, то сужение u на A непрерывно. [Показать, что в противном случае 0 был бы точкой прикосновения для пересечения множества A с некоторой гиперплоскостью $u^{-1}(\alpha)$; вывести отсюда, что для $b \in A$ такого, что $u(b) = -\alpha$, $\frac{1}{2}b$ было бы точкой прикосновения множества $A \cap u^{-1}(0)$.]

б) Пусть E — полное отделимое вещественное локально выпуклое пространство. Показать, что если пересечение гиперплоскости H' сопряженного пространства E' с каждым слабо замкнутым равностепенно непрерывным множеством $M' \subset E'$ слабо замкнуто, то H' слабо замкнута. [Использовать а) и теорему 4.]

*19) а) Пусть E — бесконечномерное пространство Фреше. Показать, что в E существуют замкнутые векторные подпространства M и N такие, что $M \cap N = \{0\}$ и $M + N$ не замкнуто. [Свести к случаю пространства E счетного типа. Пусть (x'_n) — последовательность линейно независимых непрерывных линейных форм на E, образующих всюду плотное множество в топологии $\sigma(E', E)$ (следствие предложения 3), и L_n — подпространство в E, ортогональное к множеству тех x'_i, для которых $i \leqslant 2n$; пусть x_n и y_n — два линейно независимых вектора

в дополнении к L_{n+1} относительно L_n; показать, что x_n и y_n можно выбрать так, чтобы $d(0, x_n) \geqslant 1$, $d(0, y_n) \geqslant 1$ и $d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$, где d — расстояние, определяющее топологию в E. Показать тогда, что замкнутые векторные подпространства M и N, порождаемые соответственно векторами x_n и y_n, обладают требуемым свойством; использовать следствие 4 теоремы 1 § 3 гл. I.]

б) Дать пример бесконечномерного отделимого локально выпуклого пространства E такого, что сопряженное пространство E' содержит счетное множество, всюду плотное в топологии $\sigma(E', E)$, и сумма любых двух замкнутых векторных подпространств пространства E замкнута. [См. § 1, упражнение 13.]

20) Пусть E — пространство Фреше счетного типа. Показать, что для замкнутости выпуклого множества $A' \subset E'$ в топологии $\sigma(E', E)$ достаточно, чтобы для любой последовательности (x'_n) точек из A', обладающей в E' пределом в топологии $\sigma(E', E)$, этот предел a' принадлежал A'. [Использовать теорему 5.]

§ 3. Сильная топология в сопряженном к отделимому локально выпуклому пространству

1. Определение сильной топологии

Пусть E — вещественное (соотв. комплексное) отделимое локально выпуклое пространство и E' — сопряженное пространство. Так как $E' = L(E, \mathbf{R})$ (соотв. $E' = L(E, \mathbf{C})$), то $\mathfrak{S}$-топология в E', порождаемая любым множеством $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E, объединением которых служит всё E, есть отделимая локально выпуклая топология (гл. III, § 3, предложение 2). В частности:

Определение 1. *Сильной топологией в пространстве E', сопряженном к отделимому локально выпуклому пространству E, называют топологию равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E.*

Так как образ ограниченного множества из E при любой гомотетии ограничен, так же как ограниченна выпуклая оболочка объединения любого конечного числа ограниченных множеств, то из определения окрестностей нуля для $\mathfrak{S}$-топологии (гл. III, § 3, n° 1) сразу видно, что *поляры всех ограниченных множеств из E* (или поляры фундаментальной системы ограниченных множеств из E) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для сильной топологии в E.

Мы будем иногда употреблять прилагательное „сильное" и наречие „сильно" для обозначения свойств, относящихся к сильной топологии в E'. Пространство E', наделенное сильной топологией, будет иногда называться „сильным сопряженным" к E.

Замечания. 1) Сильная топология в E' определяется полунормами

$$|x'|_B = \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle|,$$

где B пробегает фундаментальную систему ограниченных множеств пространства E. В частности, для того чтобы эта топология была *метризуемой*, необходимо и достаточно, чтобы в E существовала *счетная* фундаментальная система ограниченных множеств.

2) Из определения 1 непосредственно следует, что при наделении сопряженного пространства E' сильной топологией каноническая билинейная форма $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ оказывается $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$-*гипонепрерывной*, где $\mathfrak{S}$ — множество всех ограниченных подмножеств пространства E, а $\mathfrak{S}'$ — множество всех равностепенно непрерывных множеств из E'. Но эта форма вообще не непрерывна на $E \times E'$ (упражнение 2).

3) Ясно, что сильная топология в E' мажорирует слабую топологию $\sigma(E', E)$; и она вообще *сильнее* (упражнение 1 и § 5, n° 1). Ниже мы увидим, что *она не обязательно согласуется* с двойственностью между E' и E (n° 3). Заметим, однако, что она не изменяется при замене в E исходной топологии любой топологией, согласующейся с двойственностью между E и E' (§ 2, теорема 3).

2. Свойства сильного сопряженного

Применяя к пространству E', сопряженному к отделимому локально выпуклому пространству E, результаты § 3 гл. III, относящиеся к $\mathfrak{S}$-топологиям, мы видим, что каждое *равностепенно непрерывное* множество из E' *сильно ограниченно* (гл. III, § 3, предложение 7) и что каждое *сильно ограниченное* множество из E' *слабо ограниченно*. Кроме того, имеют место следующие два предложения:

Предложение 1. *Если E — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство, то каждое слабо ограниченное подмножество сопряженного пространства E' сильно ограниченно.*

Это — частный случай следствия 1 теоремы 1 § 3 гл. III.

В этом случае можно говорить просто об *ограниченных* множествах в E', без уточнения $\mathfrak{S}$-топологии.

Предложение 2. *Если E — отделимое бочечное пространство, то каждое слабо ограниченное множество в сопряженном пространстве E' равностепенно непрерывно, а потому и сильно ограниченно.*

Принимая во внимание предшествующие замечания, это — уже доказанное свойство (§ 2, теорема 1).

Таким образом, можно сказать, что для отделимого бочечного пространства E понятия равностепенно непрерывного множества, относительно слабо компактного множества, сильно ограниченного множества и слабо ограниченного множества в сопряженном пространстве E' *совпадают*; в этом случае мы будем говорить просто об *ограниченных* множествах в E' без дальнейшего уточнения.

Схолия. Если E — *бочечное* пространство, а E' — его *сильное сопряженное*, то *поляры окрестностей нуля* любого из этих двух пространств образуют *фундаментальную систему ограниченных множеств* другого, а *поляры ограниченных множеств — фундаментальную систему окрестностей нуля* другого.

Предложение 3. *Сильное сопряженное к отделимому бочечному пространству квазиполно.*

Это — частный случай следствия 2 теоремы 4 § 3 гл. III, относящейся к полным множествам в пространстве $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

3. Второе сопряженное. Рефлексивные пространства

Определение 2. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное. Вторым сопряженным к E называют сопряженное E'' к отделимому локально выпуклому пространству, получающемуся при наделении E' сильной топологией.*

Пусть $\tilde{x}$ для каждого $x \in E$ — линейная форма $x' \to \langle x, x' \rangle$ на E'; она непрерывна в слабой топологии $\sigma(E', E)$, а потому тем более в сильной топологии в E', иначе говоря, $\tilde{x} \in E''$; кроме того, $\tilde{x} = 0$ влечет $x = 0$, поскольку E и E' находятся в двойственности (§ 1, n° 1). Поэтому отображение $x \to \tilde{x}$ есть изоморфизм структуры векторного (не топологического) пространства в E на такую же структуру некоторого подпространства пространства E''; рассматривая E (в качестве не топологического векторного пространства), мы всегда

будем считать его погруженным в E'' посредством этого отображения (называемого *каноническим*). Заметим, что отображение $x \to \tilde{x}$ не обязательно непрерывно при наделении E его исходной топологией, а E'' — сильной (см. упражнения 5 и 6). Однако если E *бочечно*, то сильная топология пространства E'' индуцирует в E, рассматриваемом как погруженное в E'', его исходную топологию; это вытекает из Сходии n° 2.

Определение 3. *Отделимое локально выпуклое пространство E называется полурефлексивным, если каждая линейная форма на сопряженном пространстве E', непрерывная в сильной топологии, непрерывна в слабой топологии* (иначе говоря, представима в виде $x' \to \langle x, x' \rangle$, где $x \in E$).

То же самое можно выразить, сказав, что $x \to \tilde{x}$ отображает E *на* E'', или еще — что E и E'' *алгебраически* совпадают. Это означает также, что сильная топология в E' *согласуется с двойственностью* между E и E'.

Предложение 4. *Пространство E', сопряженное к полурефлексивному пространству E, бочечно в сильной топологии.*

Действительно, бочка в сильном сопряженном E' есть тогда поляра ограниченного множества из E (§ 2, следствие 3 предложения 4) и тем самым окрестность нуля в сильной топологии.

Теорема 1. *Для того чтобы отделимое локально выпуклое пространство E было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ каждое замкнутое ограниченное множество из E было компактно.*

В силу предложения 4, необходимость этого условия сразу следует из теоремы 1 § 2. Обратно, предположим, что в топологии $\sigma(E, E')$ каждое замкнутое ограниченное множество из E компактно. Тогда сильная топология в E' есть $\mathfrak{S}$-топология, определяемая некоторым множеством $\mathfrak{S}$ уравновешенных выпуклых множеств из E, компактных в топологии $\sigma(E, E')$ (а именно — всех замкнутых уравновешенных ограниченных выпуклых множеств из E). Из теоремы Макки (§ 2, теорема 2) следует тогда, что E есть сопряженное к E', наделенному сильной топологией.

Замечания. 1) Для полурефлексивности пространства E необходимо и достаточно, чтобы каждое *выпуклое* сильно замкнутое множество в E' было слабо замкнуто. Действительно, это необходимо согласно предложению 4 § 2; обратно, если каждая сильно замкнутая гиперплоскость в E' слабо замкнута, то каждая сильно непрерывная линейная форма на E' слабо непрерывна (гл. I, § 2, теорема 1).

2) Из теоремы 1 сразу следует, что полурефлексивное пространство E *квазиполно* в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ и тем более в исходной топологии (§ 2, п° 4). Поэтому каждая последовательность Коши (x_n) в E относительно топологии $\sigma(E, E')$ обладает в E пределом в этой топологии (гл. III, § 2, п° 5).

Если E полурефлексивно, то, рассматривая его как сопряженное к E', можно вводить в нем $\mathfrak{S}'$-топологии, где $\mathfrak{S}'$ — множества подмножеств из E', ограниченных в сильной топологии. В частности:

Определение 4. *Отделимое локально выпуклое пространство E называется рефлексивным, если оно полурефлексивно и его исходная топология совпадает с топологией равномерной сходимости на сильно ограниченных множествах из E'* (иначе говоря — с сильной топологией в E, рассматриваемом как сопряженное к его сильному сопряженному E').

Теорема 2. *Для того чтобы отделимое локально выпуклое пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было бочечным и чтобы в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ каждое замкнутое ограниченное множество из E было компактно.*

Второе условие выражает, что E полурефлексивно (теорема 1). Будем в дальнейшем предполагать, что это условие выполнено, так что можно говорить об ограниченных множествах в E', не уточняя — в какой $\mathfrak{S}$-топологии (предложение 4 и § 2, теорема 1). Бочки в E (в исходной топологии) — это поляры уравновешенных ограниченных множеств из E' (§ 2, следствие 3 предложения 4). Поэтому для рефлексивности E, в силу определения сильной топологии, необходимо и достаточно, чтобы бочки в E были окрестностями нуля в исходной топологии, т. е. чтобы E было бочечным.

Предложение 5. *Сильное сопряженное к рефлексивному пространству рефлексивно.*

Это сразу следует из определения 4.

4. Монтелевские пространства

Определение 5. *Монтелевским пространством называется отделимое бочечное пространство, в котором каждое ограниченное множество относительно компактно.*

Примеры. 1) Каждое конечномерное пространство — монтелевское. *Нормированное* монтелевское пространство локально компактно и, следовательно, конечномерно (гл. I, § 2, теорема 3).

2) Пусть $\mathscr{E}$ — векторное пространство всех *бесконечно дифференцируемых* числовых функций на $\mathbf{R}$. Для каждой пары целых чисел $n > 0$, $m \geqslant 0$ и каждой функции $f \in \mathscr{E}$ положим

$$p_{nm}(f) = \sup_{-n \leqslant t \leqslant n} |f^{(m)}(t)|.$$

Ясно, что p_{nm} — полунормы на $\mathscr{E}$, определяющие в этом пространстве метризуемую локально выпуклую топологию. Покажем, что $\mathscr{E}$, наделенное этой топологией, есть *монтелевское пространство Фреше*. Действительно, ясно, что для любой последовательности Коши (f_k) в $\mathscr{E}$ последовательность производных m-го порядка $\left(f_k^{(m)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ $(m \in \mathbf{N})$ сходится равномерно на каждом компактном множестве из $\mathbf{R}$ к некоторой непрерывной функции g_m, причем в силу теоремы о равномерной сходимости первообразных (Функц. вещ. перем., гл. II, § 1, теорема 1) $g_m = g_0^{(m)}$. Это показывает, что $\mathscr{E}$ *полно*. Пусть теперь B — ограниченное множество из $\mathscr{E}$. Производные $(m+1)$-го порядка равномерно ограниченны на каждом компактном интервале $K_n = [-n, n]$ из $\mathbf{R}$; в силу теоремы о конечных приращениях, отсюда следует, что сужения на K_n производных m-го порядка функций из B образуют для каждого $m \geqslant 0$ *равностепенно непрерывное* множество; теорема Асколи показывает тогда, что это множество *относительно компактно* в топологии равномерной сходимости на K_n (Общ. топ., Рез., § 13, п° 18; гл. X, § 4, теорема 1). Тем самым для каждого целого r и каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие (A_i) множества B такое, что для любых двух функций f, g, принадлежащих одному и тому же множеству A_i, $p_{nm}(f-g) \leqslant \varepsilon$ $(0 \leqslant m \leqslant r)$; иными словами, B *предкомпактно*, а следовательно, поскольку $\mathscr{E}$ полно, и относительно компактно в $\mathscr{E}$.

3) °Пространство всех *голоморфных функций* на открытом множестве из $\mathbf{C}^n$, наделенное топологией компактной сходимости, есть монтелевское пространство Фреше. Точно так же и пространство всех *гармонических функций* на открытом множестве из $\mathbf{R}^n$, наделенное топологией компактной сходимости, есть монтелевское пространство Фреше.°

Предложение 6. *В каждом ограниченном подмножестве B монтелевского пространства E исходная и ослабленная топологии индуцируют одну и ту же топологию.*

Очевидно, можно ограничиться тем случаем, когда B замкнуто (в исходной топологии). Так как топология, индуцируемая в B ослабленной топологией, отделима и мажорируется топологией, индуцируемой исходной топологией, а в последней B компактно, то эти две топологии совпадают (Общ. топ., Рез., § 8, n° 5; гл. I, § 10, n° 4).

Следствие. *В монтелевском пространстве E каждый фильтр со счетным базисом, сходящийся в ослабленной топологии к точке x_0, сходится к x_0 и в исходной топологии.*

Достаточно доказать справедливость этого утверждения для элементарного фильтра, ассоциированного с последовательностью $(x_n)_{n\geqslant 1}$ (Общ. топ., Рез., § 2, n° 10; гл. I, § 5, n° 10). Но если последовательность (x_n) сходится к x_0 в топологии $\sigma(E, E')$, то она ограниченна в этой топологии, а, следовательно, также в исходной топологии пространства E (§ 2, теорема 3). Но в таком случае топология, индуцируемая исходной топологией в множестве, образованном точками x_0 и x_n $(n \geqslant 1)$, совпадает с топологией, которую индуцирует $\sigma(E, E')$, откуда и вытекает справедливость утверждения.

Из определения 5 и теоремы 2 сразу видно, что монтелевское пространство *рефлексивно*. Кроме того:

Предложение 7. *Сильное сопряженное к монтелевскому пространству есть монтелевское пространство.*

В самом деле, пусть E — монтелевское пространство и E' — его сильное сопряженное. Так как E рефлексивно, то E' бочечно (предложение 4). Покажем, что каждое ограниченное замкнутое выпуклое множество B' в E' сильно компактно. Так как E бочечно, то B' равностепенно непрерывно (предложение 2); поэтому топология, индуцируемая в B' слабой топологией $\sigma(E', E)$, совпадает с топологией, индуцируемой топологией компактной сходимости (гл. III, § 3, предложение 5). Но каждое ограниченное замкнутое множество в E компактно, так что в E' топология компактной сходимости совпадает с сильной. Так как B' слабо компактно (§ 2, предложения 2 и 4), то заключаем, что оно сильно компактно, и предложение доказано.

Упражнения. *1) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство.

а) Для того чтобы в сопряженном пространстве E' сильная топология совпадала со слабой, необходимо и достаточно, чтобы топология ограниченно замкнутого пространства, ассоциированного с E (гл. III, § 2, упражнение 13), была сильнейшей локально выпуклой топологией в E.

б) Для того чтобы сильная топология в E' совпадала с $\tau(E', E)$, необходимо и достаточно, чтобы E было полурефлексивно.

в) Предположим, что E — инфрабочечное пространство. Для того чтобы сильная топология в E' совпадала с топологией компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы E было монтелевским. [См. гл. III, § 3, упражнение 10.]

2) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное, наделенное $\mathfrak{S}$-топологией, где $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E, образованное ограниченными множествами. Показать, что для того, чтобы билинейная форма $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ была непрерывна на $E \times E'$, необходимо и достаточно, чтобы топологию в E можно было определить одной нормой, а рассматриваемая $\mathfrak{S}$-топология была сильной топологией в E'. [См. гл. III, § 2, упражнение 2.]

*3) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, C — замкнутое уравновешенное выпуклое множество в E и u — линейная форма на E. Показать, что если сужение u на C непрерывно в исходной топологии, то оно непрерывно и в топологии $\sigma(E, E')$. [Использовать упражнение 18а § 2.] Показать на примере, что сужение u на векторное подпространство M, порожденное множеством C, не обязательно непрерывно. [За E взять $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, наделенное нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$, а за C — надлежащим образом выбранное выпуклое множество, порождающее E.]

б) Пусть $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E, образованное замкнутыми уравновешенными ограниченными выпуклыми множествами. Показать, что пополнением пространства E', наделенного $\mathfrak{S}$-топологией, служит векторное пространство F всех линейных форм на E, сужения которых на каждое множество из $\mathfrak{S}$ непрерывны („*теорема Гротендика*"). [Чтобы показать, что для каждой линейной формы $u \in F$, каждого множества $A \in \mathfrak{S}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует линейная форма $v \in E'$ такая, что $|u(x) - v(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, заметить, что сужение u на A в силу а) слабо непрерывно и что A слабо предкомпактно. Свести, таким образом, доказательство к следующей задаче: пусть заданы множество $B \in \mathfrak{S}$, конечномерное подпространство M пространства E и линейная форма u_0 на M такая, что $|u_0(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех $x \in B \cap M$; продолжить u_0 до непрерывной линейной формы $v \in E'$ такой, что $|v(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех $x \in B$. Для решения ее использовать предло-

жение 4 § 3 гл. II, примененное к пространству E'^*, наделенному топологией $\sigma(E'^*, E')$.]

в) Вывести из б), что сильное сопряженное к отделимому ограниченно замкнутому пространству (и, в частности, к метризуемому локально выпуклому пространству) полно. [См. гл. III, § 3, упражнение 18.]

г) Показать, что пополнение $\hat{E}$ отделимого локально выпуклого пространства E может быть отождествлено с пространством всех линейных форм на E', сужение которых на каждое равностепенно непрерывное множество из E' слабо непрерывно. Получить отсюда новое доказательство теоремы 4 § 2.

4) Пусть I — несчетное множество и E — прямая сумма $\mathbf{R}^{(I)}$, наделенная топологией, определенной в упражнении 7 § 1 гл. I. Показать, что сильное сопряженное E' к E не полно и что в E' существуют сильно ограниченные множества, не являющиеся относительно слабо компактными. [См. § 2, упражнение 11.]

5) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, $\mathfrak{B}_1$ — множество всех равностепенно непрерывных выпуклых подмножеств сопряженного пространства E', $\mathfrak{B}_2$ — множество всех относительно слабо компактных выпуклых множеств из E', $\mathfrak{B}_3$ — множество всех сильно ограниченных выпуклых множеств из E' и $\mathfrak{B}_4$ — множество всех слабо ограниченных выпуклых множеств из E'. Показать, что $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \subset \mathfrak{B}_3 \subset \mathfrak{B}_4$. [См. § 2, теоремы 2 и 3.] Дать пример пространства E, для которого эти четыре множества подмножеств попарно различны. [Принять за E произведение трех пространств, для которых соответственно $\mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{B}_2$ (см. § 2, упражнение 4б), $\mathfrak{B}_2 \neq \mathfrak{B}_3$ (упражнение 4) и $\mathfrak{B}_3 \neq \mathfrak{B}_4$ (см. гл. III, § 3, замечание после следствия 1 теоремы 4).]

*6) а) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство. Доказать равносильность следующих свойств: α) E инфрабочечно (гл. III, § 2, упражнение 12); β) каждое сильно ограниченное множество в E' равностепенно непрерывно; γ) каждое сильно ограниченное множество в E' относительно слабо компактно, а исходная топология пространства E совпадает с $\tau(E, E')$; δ) топология, индуцируемая в E сильной топологией второго сопряженного E'', совпадает с исходной топологией в E. Замыкания в топологии $\sigma(E'', E')$ множеств, образующих фундаментальную систему окрестностей нуля для исходной топологии в E, образуют тогда фундаментальную систему окрестностей нуля для сильной топологии в E''.

б) Показать, что если E инфрабочечно, а его сопряжением E' служит алгебраическое сопряженное E^*, то исходной топологией в E является сильнейшая локально выпуклая топология. [Использовать а) и упражнение 11б § 1.]

*7) Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Для всех топологий $\mathfrak{T}$ в F, согласующихся с двойственностью между F и G, сильная топология в G, рассматриваемом как сопряженное к F,

одна и та же (§ 2, теорема 3) и тем самым зависит лишь от двойственности между F и G; будем обозначать ее $\beta(G, F)$.

а) Доказать равносильность следующих свойств: α) F, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, согласующейся с двойственностью между F и G, полурефлексивно; β) G, наделенное топологией $\tau(G, F)$, бочечно; γ) F, наделенное топологией $\tau(F, G)$, квазиполно и каждая ограниченная последовательность точек из F обладает предельной точкой в топологии $\sigma(F, G)$ [см. § 2, упражнение 15б]; δ) F, наделенное топологией $\tau(F, G)$, квазиполно и каждая убывающая последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в F обладает непустым пересечением [см. § 2, упражнение 16б].

б) Доказать равносильность следующих свойств: α) F, наделенное топологией $\tau(F, G)$, рефлексивно; β) G, наделенное топологией $\tau(G, F)$, рефлексивно; γ) F и G, наделенные соответственно топологиями $\tau(F, G)$ и $\tau(G, F)$, бочечны.

8) Для того чтобы квазиполное отделимое локально выпуклое пространство было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы было полурефлексивно каждое его замкнутое векторное подпространство, содержащее всюду плотное счетное множество. [См. § 2, упражнение 15б.]

*9) Пусть E — не полурефлексивное квазиполное отделимое локально выпуклое пространство; H — замкнутая гиперплоскость в E, содержащая начало; (C_n) — убывающая последовательность непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в H, имеющая пустое пересечение (упражнение 7а); x — точка, не принадлежащая H; и A — замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка объединения множеств $\left(1-\frac{1}{n}\right)x+C_n$ $(n>0)$.

а) Показать, что A не обладает опорной гиперплоскостью, параллельной H. [Принять во внимание, что для каждого $y \in x+H$ существует целое n такое, что $y \notin x+C_n$.]

б) Пусть $z \in H$ таково, что $z \notin C_0$. Показать, что выпуклая оболочка объединения двух замкнутых ограниченных выпуклых миожеств A и $B=x+z+C_0$ не замкнута. [Для этого показать, что $x+z$ есть точка прикосновения этой оболочки, но не принадлежит ей.]

*10) Пусть E — отделимое инфрабочечное пространство.

а) Показать, что если сильное сопряженное E' к E ограниченно замкнуто, то пополнение $\hat{E}$ пространства E, рассматриваемое как векторное подпространство в E'^* (упражнение 3г), содержится во втором сопряженном E''. [См. упражнение 3.]

б) E называется *правильным*, если каждое множество в E'', ограниченное в топологии $\sigma(E'', E')$, содержится в замыкании (в этой топологии) некоторого ограниченного множества из E. Показать, что для того, чтобы E было правильным, необходимо и достаточно, чтобы его сильное сопряженное E' было бочечным.

*11) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, обладающее полурефлексивным сильным сопряженным E'.

а) Показать, что $\sigma(E', E'')$ и $\sigma(E', E)$ индуцируют в каждом сильно ограниченном множестве из E' одну и ту же топологию.

б) Вывести из а), что E в топологии $\tau(E, E')$ инфрабочечно [см. упражиение 6] и пополнение $\hat{E}$ пространства E в этой топологии, рассматриваемое как часть E'^* (упражнение 3г), содержит E'' [использовать упражнение 3а]. В частности, если E в топологии $\tau(E, E')$ квазиполно, то оно в этой топологии рефлексивно.

в) Показать, что если сильное сопряженное E' к E рефлексивно, то $\hat{E} = E''$, сильные топологии $\beta(E', E)$ и $\beta(E', \hat{E})$ (упражнение 7) совпадают и $\hat{E}$ рефлексивно. [Использовать б), упражнение 3г и упражнение 10б.]

*12) а) Пусть M — замкнутое векторное подпространство отделимого локально выпуклого пространства E. Показать, что для равностепенной непрерывности множества в факторпространстве E'/M°, рассматриваемом как сопряженное к M, необходимо и достаточно, чтобы оно было образом равностепенно непрерывного множества из E' при каноническом отображении E' на E'/M°. [См. Общ. топ., гл. III, § 3, упражнение 15 ([28]).]

б) Показать, что если E полурефлексивно, то и M полурефлексивно, причем сильная топология $\beta(E'/M^\circ, M)$ (упражнение 7) есть фактортопология сильной топологии $\beta(E', E)$ по M°. [Использовать следствие 2 предложения 4 § 2.] *)

в) Показать, что если в E замкнутая выпуклая оболочка каждого компактного множества компактна, то топология компактной сходимости в факторпространстве E'/M° (рассматриваемом как сопряженное к M) есть фактортопология топологии компактной сходимости в E' по M°.

г) Показать, что если M инфрабочечно и E'/M°, наделенное топологией $\beta(E'/M^\circ, M)$, ограниченно замкнуто, то $\beta(E'/M^\circ, M)$ есть фактортопология топологии $\beta(E', E)$ по M°. [Использовать а).]

13) Пусть $((F_\iota, G_\iota))_{\iota \in I}$ — семейство пар векторных пространств в двойственности, F — произведение $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ векторных пространств F_ι и G — прямая сумма векторных пространств G_ι; F и G приводятся в двойственность билинейной формой $\langle (x_\iota), (y_\iota) \rangle = \sum_\iota \langle x_\iota, y_\iota \rangle$.

а) Показать, что сильная топология $\beta(F, G)$ (упражнение 7) есть произведение сильных топологий $\beta(F_\iota, G_\iota)$. [См. гл. III, § 2, упражнение 10.]

б) Пусть B_ι для каждого $\iota \in I$ — уравновешенное ограниченное множество в F_ι и $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$. Показать, что B° (в G) есть выпуклая

*) Существуют монтелевские пространства, иекоторые замкиутые векторные подпространства которых нерефлексивны (§ 5, упражнение 21).

оболочка объединения множеств $B_\iota^\circ \subset G_\iota$. Вывести отсюда, что топология $\beta(G, F)$ есть прямая сумма топологий $\beta(G_\iota, F_\iota)$.

14) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство отделимых локально выпуклых пространств, E — произведение пространств E_ι, F — их топологическая прямая сумма. Показать, что для того, чтобы E или F было полурефлексивным (соотв. рефлексивным), необходимо и достаточно, чтобы каждое E_ι было полурефлексивно (соотв. рефлексивно). [Использовать упражнение 13, а также упражнение 9б § 2.]

*15) Показать, что произведение любого семейства инфрабочечных пространств инфрабочечно. [Свести к случаю отделимых нифрабочечных пространств; использовать тогда упражнения 6 и 13б, а также упражнение 10 § 2 гл. III.]

16) Показать, что топологическая прямая сумма семейства полных отделимых локально выпуклых пространств полна. [Использовать упражнение 3г.]

17) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом возрастающей последовательности (E_n) своих замкнутых векторных подпространств (гл. II, § 2, n° 5).

а) Показать, что если сильное сопряженное каждого из пространств E_n полно, то и сильное сопряженное пространство E полно. [См. упражнение 3.]

б) Для того чтобы E было полурефлексивным (соотв. рефлексивным), необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было полурефлексивно (соотв. рефлексивно).

*18) Пусть $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство отделимых локально выпуклых пространств, фильтрующееся по отношению $\supset$ и такое, что если $E_\beta \subset E_\alpha$, то топология пространства E_β мажорирует топологию, индуцируемую в E_β из E_α. Пусть, далее, E — пересечение всех пространств E_α, наделенное топологией, являющейся верхней гранью топологий, индуцируемых в E из всех E_α. Показать, что если каждое E_α полурефлексивно, то E полурефлексивно. [Рассмотреть ультрафильтр в ограниченном множестве из E.]

19) Пусть E — пространство Фреше. Показать, что в сопряженном пространстве E' каждый фильтр $\mathfrak{F}$ со счетным базисом, являющийся в слабой топологии фильтром Коши, ограничен. [Рассуждать от противного, используя то обстоятельство, что в E' существует счетная фундаментальная система ограниченных множеств.]

20) а) Пусть E — пространство Фреше. Показать, что сопряженное пространство E', наделенное топологией компактной сходимости или какой-нибудь более сильной $\mathfrak{S}$-топологией, полно. [См. гл. III, § 3, замечание после теоремы 4.] Показать, что если E не рефлексивно, то E' не инфрабочечно ни для какой $\mathfrak{S}$-топологии, мажорирующей топологию компактной сходимости и мажорируемой топологией $\tau(E', E)$.

б) Пусть $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство пространств Фреше, E — векторное пространство и h_α для каждого $\alpha\in A$ — линейное отображение F_α в E. Предположим, что E, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой непрерывны все h_α (гл. II, § 2, п°2), отделимо. Показать, что сопряженное E' к E, наделенное топологией компактной сходимости или любой более сильной $\mathfrak{S}$-топологией, полно. [См. упражнение 3.]

*21) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство и E' — его сильное сопряженное.

а) Показать, что если E' метризуемо, то топология в E может быть определена одной нормой. [Использовать упражнения 2, 5 и 15 § 2 гл. III.]

б) Пусть (U'_n) — убывающая последовательность сильно замкнутых уравновешенных выпуклых окрестностей нуля в E'. Показать, что если пересечение U' этих окрестностей есть бочка в сильной топологии, то U' — окрестность нуля в этой топологии. [Пусть (K'_n) — фундаментальная последовательность слабо замкнутых уравновешенных выпуклых сильно ограниченных множеств из E'. Показать, что существуют последовательность (λ_n) чисел >0 и последовательность (W'_n) слабо замкнутых уравновешенных выпуклых сильных окрестностей нуля в E' такие, что $\lambda_n K'_n\subset 2^{-n-2}U'$ для каждого n, $\lambda_i K'_i\subset W'_j$ для каждой пары индексов i, j и $W'_n\subset U'_n$ для всех n. Провести индукцию по n, используя лемму 1 § 3 гл. III и упражнение 15 из Общ. топ., гл. III, § 3 ([28]).]

в) Показать, что если (A''_n) — последовательность равностепенно непрерывных множеств во втором сопряженном E'', объединение которых A'' ограничено в топологии $\sigma(E'', E')$, то A'' равностепенно непрерывно. [Использовать б).]

г) Вывести из в), что в E'' каждая последовательность Коши по топологии $\sigma(E'', E')$ сходится, и заключить отсюда, что E'' — полное метризуемое пространство в сильной топологии $\beta(E'', E')$ *).

*22) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство.

а) Пусть (A'_n) — возрастающая последовательность уравновешенных выпуклых сильно ограниченных множеств в сопряженном пространстве E' такая, что каждое сильно ограниченное множество из E' поглощается хотя бы одним A'_n, и пусть U' — объединение множеств A'_n. Показать, что сильное замыкание множества U' в E' совпадает с множеством всех $x'\in E'$ таких, что $\lambda x'\in U'$, когда $0\leqslant\lambda<1$ (т. е. с замыканием U' в сильнейшей локально выпуклой топологии в E'). [Принять во внимание, что если $x'\notin\lambda U'$, где $\lambda>1$, то для каждого n существует линейная форма $x''_n\in E''$ такая, что $x''_n\in A'^{\circ}_n$

*) Неизвестно, не будет ли вообще второе сопряженное E'' к отделимому локально выпуклому пространству E полным в сильной топологии $\beta(E'', E')$, даже если предположить E бочечным.

и $\langle x', x''_n\rangle = \lambda$; использовать тогда упражнение 21в для доказательства существования $x'' \in U'^{\circ}$ в E'' такого, что $\langle x', x''\rangle = \lambda$.]

б) Показать, что каждое уравновешенное выпуклое множество V' в E', поглощающее все сильно ограниченные множества из E', содержит бочку (относительно сильной топологии), поглощающую все сильно ограниченные множества из E'. [Пусть (K'_n) — фундаментальная последовательность слабо замкнутых уравновешенных выпуклых сильно ограниченных множеств из E' и $\lambda_n > 0$ таково, что $\lambda_n K'_n \subset \frac{1}{2} V'$; применить а) к последовательности (A'_n), где A'_n — выпуклая оболочка объединения тех $\lambda_i K'_i$, для которых $i \leqslant n$.]

в) Вывести из б), что для того, чтобы E', наделенное сильной топологией, было ограниченно замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы E было правильным (упражнение 10б).

г) Пусть F — отделимое локально выпуклое пространство. Если M — правильное метризуемое замкнутое векторное подпространство в F, то $\beta(F'/M^{\circ}, M)$ есть фактортопология топологии $\beta(F', F)$ по M°. [Использовать в) и упражнение 12г.]

*23) Пусть $a^{(n)}$ для каждого целого $n > 0$ — двойная последовательность $(a^{(n)}_{pq})$, где $a^{(n)}_{pq} = q$, если $p \leqslant n$, и $a^{(n)}_{pq} = 1$, если $p > n$ и пусть E — векторное пространство таких двойных последовательностей $x = (x_{pq})$ вещественных чисел, что $r_n(x) = \sum_{p,q} a^{(n)}_{pq} |x_{pq}|$ конечно для каждого целого $n > 0$. E, наделенное топологией, определяемой полунормами r_n, есть пространство Фреше [§ 1, упражнение 1в]; пространство E', сопряженное к E, может быть отождествлено с пространством таких двойных последовательностей $x' = (x'_{pq})$ вещественных чисел, что хотя бы для одного номера n и всех пар (p, q), выполняются при надлежащем выборе фиксированного коэффициента k неравенства $|x'_{pq}| \leqslant k a^{(n)}_{pq}$, причем $\langle x, x'\rangle = \sum_{p,q} x_{pq} x'_{pq}$. [§ 1, упражнение 1в.]

Пусть $J(p_0; (m_p))$ для каждого целого $p_0 > 0$ и каждой последовательности (m_p) целых чисел > 0 — множество всех пар (p, q) целых чисел > 0, удовлетворяющих условиям $p \geqslant p_0$ и $q \geqslant m_p$. Пусть, далее, $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, образованного множествами $J(p_0; (m_p))$, и $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр, мажорирующий фильтр с базисом $\mathfrak{B}$.

а) Показать, что двойная последовательность $(\langle x_{pq}, x'\rangle)$ имеет предел $u(x')$ по фильтру $\mathfrak{F}$ для каждого $x' = (x'_{pq}) \in E'$; при этом $|u(x')| \leqslant 1$ для каждого $x' \in V_n^{\circ}$, где V_n — окрестность нуля в E, определяемая неравенством $r_n(x) \leqslant 1$.

б) Пусть U' — слабо замкнутая уравновешенная выпуклая сильная окрестность нуля в E' и $\alpha_n > 0$, для каждого n, таково, что $\alpha_n V_n^{\circ} \subset U'$. Пусть, далее, m_p, для каждого $p > 0$, — целое, для которого $2^{p+1} \leqslant \alpha_p m_p$, и $x' = (x'_{pq})$ — двойная последовательность, в которой $x'_{pq} = 0$, если

$q < m_p$, и $x'_{pq} = 2$, если $q \geqslant m_p$. Показать, что $x' \in U'$, но $u(x') = 2$. Вывести отсюда, что u не сильно непрерывна на E', хотя и ограничена на всех ограниченных множествах из E', и, следовательно (упражнение 22в), что E — не правильное.

в) Получить из б) пример замкнутого подпространства M пространства Фреше F, для которого бы сильная топология $\beta(F'/M^\circ, M)$ отличалась от фактортопологии сильной топологии $\beta(F', F)$ по M°. [Погрузить E в произведение счетного семейства банаховских пространств.]

*24) Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство и E' — его сильное сопряженное. Предположим, что E' содержит всюду плотную последовательность (x'_n).

а) Показать, что E' бочечно или, иными словами, что E — правильное. [Пусть U' — бочка в E' (и, значит, поглощает все ограниченные множества в E', поскольку последнее полно), (K'_n) — фундаментальная последовательность ограниченных множеств из E' и (y'_n) — всюду плотная последовательность в $\mathbf{C}U'$. Показать, что существуют последовательность (V'_n) замкнутых уравновешенных выпуклых окрестностей нуля в E' и последовательность (λ_n) чисел > 0 такие, что $\lambda_n K'_n \subset U'$, $y'_n \notin V'_n$ для каждого n и $\lambda_i K'_i \subset V'_j$ для каждой пары индексов i, j. Используя упражнение 21б, показать, что $V' = \bigcap_n V'_n$ есть окрестность нуля, содержащаяся в U'.]

б) Показать, что E — пространство счетного типа. [Пусть α — система, образованная из точки x'_n, конечного числа рациональных чисел $\lambda_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и m номеров n_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ таких, что $x'_n \notin 2\sum_{k=1}^{m} \lambda_k K'_{n_k} = 2H'$, и $x_\alpha \in E$ таково, что гиперплоскость, определяемая уравнением $\langle x_\alpha, y' \rangle = 1$, строго отделяет слабо компактные множества $x'_n + H'$ и H'. Показать, что если $x' \in E'$ таково, что $\langle x_\alpha, x' \rangle = 0$ для каждой системы α, то необходимо $x' = 0$; воспользоваться для этой цели тем, что E' ограниченно замкнуто, так что для любой последовательности (λ_m) чисел > 0 множество U всех конечных сумм $\sum_{m=1}^{n} \lambda_m x'_m$, где n — любые целые числа и $x'_m \in K'_m$ для всех m, есть окрестность нуля в E' (упражнение 22в).]

25) Показать, что произведение и топологическая прямая сумма любого семейства монтелевских пространств являются монтелевскими пространствами. [См. § 2, упражнение 9б.] То же верно и для строгого индуктивного предела возрастающей последовательности монтелевских пространств *).

*) Напротив, факторпространство монтелевского пространства E по замкнутому векторному подпространству не обязательно является монтелевским пространством, даже если E — пространство Фреше (§ 5, упражнение 21).

*26) Пусть E — пространство Фреше счетного типа. Показать, что если в сопряженном пространстве E' каждая слабо сходящаяся последовательность сильно сходится, то E — монтелевское пространство. [Доказать, что каждое ограниченное множество в E' относительно сильно компактно, используя для этого предложение 3 § 2 и упражнение 2 из Общ. топ., гл. II, § 4 ([29]); в заключение использовать приведенное выше упражнение 11в.]

*27) Пусть (c_{mn}) — двойная последовательность чисел >0 и E — векторное пространство всех таких последовательностей $x=(x_n)$ вещественных чисел, что $p_m(x)=\sum_n c_{mn}|x_n|<+\infty$ для каждого целого m. Наделим E топологией, определяемой семейством полунорм p_m и превращающей E в пространство Фреше; сопряженное пространство E' будет отождествимо тогда с пространством всех последовательностей $x'=(x'_n)$ таких, что $\sup_n c_{mn}^{-1}|x'_n|<+\infty$ хотя бы для одного m, а каноническая билинейная форма $\langle x, x'\rangle$ — с $\sum_n x_n x'_n$ (§ 1, упражнение 1в). Предположим, что нет никакой подпоследовательности номеров (n_k), для которой существовали бы последовательности (a_m), (b_k) вещественных чисел $\geqslant 0$ такие, что $c_{m,n_k}\leqslant a_m b_k$, каковы бы ни были m и k. Показать, что при этих условиях каждая слабо сходящаяся последовательность в E' сильно сходится и, следовательно (упражнение 26), E — монтелевское пространство. [Вести доказательство от противного; выполнив, если нужно, преобразование вида $(x_n)\to(a_n x_n)$, свести к случаю, когда в E' существует последовательность $(x'^{(p)})_{p\in\mathbf{N}}$, слабо сходящаяся к нулю и такая, что $|x'^{(p)}_n|\leqslant 1$ для каждой пары (p, n), а в E — ограниченное множество M, определяемое неравенствами $p_m(x)\leqslant b_m$ $(m\in\mathbf{N})$, такое, что $\sup_{x\in M}|\langle x, x'^{(p)}\rangle|\geqslant 2\delta>0$ для каждого целого p. Установить, что при этих предположениях существуют строго возрастающая последовательность (r_q) целых чисел и последовательность $(x^{(q)})$ точек из M такие, что

$$\sum_{k=r_q+1}^{r_{q+1}}|x_k^{(q)}|>\delta$$

для каждого номера q. Рассуждая от противного, показать тогда, что для каждого q существует хотя бы один номер s_q такой, что $r_q<s_q\leqslant r_{q+1}$ и $c_{m,s_q}\leqslant b_m\dfrac{2^{m+2}}{\delta}$ для всех целых m, в противоречие с предположением.]

*28) а) Пусть $(E_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность нормированных пространств, причем E_1 не есть пространство счетного типа. Пусть F — векторное подпространство в $E=\prod_n E_n$ такое, что $\mathrm{pr}_k F=E_k$

для каждого k. Показать, что существуют число $\delta > 0$ и ограниченная последовательность $(x_m)_{m \geqslant 1}$ в F такие, что в E_1 выполняется неравенство $\| \mathrm{pr}_1 x_i - \mathrm{pr}_1 x_j \| \geqslant \delta$ для каждой пары различных индексов i, j. [Принять во внимание, что в каждом несчетном подмножестве A из F содержится несчетное подмножество B такое, что $\mathrm{pr}_k B$ ограничена в E_k для всех k.]

б) Вывести из а), что каждое метризуемое монтелевское пространство есть пространство счетного типа. [Использовать предложение 7 § 5 гл. II, а также упражнение 12б из Общ. топ., гл. I, § 8 ([30]).]

в) Вывести из б), что в сильном сопряженном к метризуемому монтелевскому пространству существует счетное всюду плотное множество. [См. § 2, предложение 3.]

29) Пусть E — отделимое комплексное локально выпуклое пространство и E_0 — его базисное вещественное локально выпуклое пространство. Показать, что каноническое линейное отображение $f \to \Re f$ пространства E' на E'_0 есть гомеоморфизм для $\mathfrak{S}$-топологий в E' и E'_0 при любом множестве $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств пространства E. Получить отсюда определение канонического линейного отображения второго сопряженного E'' на второе сопряженное E''_0, которое было бы гомеоморфизмом как для слабых топологий $\sigma(E'', E')$ и $\sigma\left(E''_0, E'_0\right)$, так и для сильных топологий $\beta(E'', E')$ и $\beta\left(E''_0, E'_0\right)$; доказать, что это отображение преобразует E (рассматриваемое как часть E'') в E_0 (рассматриваемое как часть E''_0).

§ 4. Сильная и слабая непрерывность

1. Сопряженное к слабо непрерывному линейному отображению

Предложение 1. *Пусть (F, G) и (F_1, G_1) — две пары векторных пространств в двойственности. Для того чтобы линейное отображение u пространства F в F_1 было непрерывным при слабых топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение v пространства G_1 в G, для которого бы*

$$\langle u(y), z_1 \rangle = \langle y, v(z_1) \rangle, \tag{1}$$

каковы бы ни были $y \in F$ и $z_1 \in G_1$.

Действительно, если это условие выполнено, то линейная форма $y \to \langle u(y), z_1 \rangle$ непрерывна (в топологии $\sigma(F, G)$) для каждого $z_1 \in G_1$; из определения слабых топологий следует тогда, что u непрерывно при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$ (гл. I, § 1, следствие 1 предложения 15). Обратно, предположим, что u при этих топологиях

непрерывно; для каждого $z_1 \in G_1$ линейная форма $y \to \langle u(y), z_1\rangle$ непрерывна в $\sigma(F, G)$, значит (§ 1, предложение 1) существует однозначно определенная точка $v(z_1) \in G$ такая, что $\langle u(y), z_1\rangle = \langle y, v(z_1)\rangle$ для всех $y \in F$.

Мы видели, что отображение v *единственно*. Если рассматривать G и G_1 как подпространства алгебраических сопряженных F^* и F_1^* к пространствам F и F_1, то соотношение (1) показывает, что v есть сужение на G_1 определенного в Алгебре отображения, сопряженного к u (Алг., гл. II, § 4, n° 9). Допуская вольность речи, мы называем v *сопряженным* к u (относительно двойственностей между F и G, с одной стороны, и F_1 и G_1 — с другой) и обозначаем ${}^t u$.

Следствие. *Если u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, то его сопряженное ${}^t u$ есть линейное отображение G_1 в G, непрерывное при топологиях $\sigma(G_1, F_1)$ и $\sigma(G, F)$, причем ${}^t({}^t u) = u$.*

Достаточно в предложении 1 поменять ролями F и F_1, с одной стороны, и G и G_1 — с другой.

Предложение 2. *Пусть u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, A — множество из F, B — множество из F_1. Тогда $(u(A))^\circ = {}^t u^{-1}(A^\circ)$; из $u(A) \subset B$ следует ${}^t u(B^\circ) \subset A^\circ$; если при этом A и B выпуклы, замкнуты (в топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$ соответственно) и содержат начало, то отношения $u(A) \subset B$ и ${}^t u(B^\circ) \subset A^\circ$ равносильны.*

Действительно, $z_1 \in (u(A))^\circ$ равносильно выполнению неравенства $\Re\langle u(y), z_1\rangle \leqslant 1$ для всех $y \in A$, а ${}^t u(z_1) \in A^\circ$ — выполнению неравенства $\Re\langle y, {}^t u(z_1)\rangle \leqslant 1$ для всех $y \in A$, так что в силу (1) получаем $(u(A))^\circ = {}^t u^{-1}(A^\circ)$. Если теперь $u(A) \subset B$, то $B^\circ \subset (u(A))^\circ = {}^t u^{-1}(A^\circ)$, откуда ${}^t u(B^\circ) \subset A^\circ$. Наконец, ${}^t u(B^\circ) \subset A^\circ$, с учетом следствия предложения 1, влечет и $u(A^{\circ\circ}) \subset B^{\circ\circ}$, чем в силу предложения 3 § 1 доказано и последнее утверждение.

Следствие. *Пусть u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$. Ядро сопряженного отображения ${}^t u$ совпадает с подпространством в G_1, ортогональным к $u(F)$.*

Достаточно применить предложение 2 к $A=F$ и $B=\overline{u(F)}$, поскольку тогда $A^\circ=\{0\}$.

Предложение 3. *Пусть u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$. Для того чтобы $u(F)$ было всюду плотным в F_1 (в топологии $\sigma(F_1, G_1)$), необходимо и достаточно, чтобы ${}^tu$ было взаимно однозначным линейным отображением G_1 в G.*

Это вытекает из следствия предложения 2, поскольку сказать, что $u(F)$ всюду плотно в F_1, все равно, что сказать, что подпространство в G_1, ортогональное к $u(F)$, сводится к одному элементу 0 (§ 1, предложение 4).

Предложение 4. *Пусть u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$. Для того чтобы u было гомоморфизмом F на подпространство $u(F)$ пространства F_1, необходимо и достаточно, чтобы подпространство ${}^tu(G_1)$ было замкнуто в G (в топологии $\sigma(G, F)$).*

Положим $N={}^tu(G_1)\subset G$; согласно следствию предложения 2, примененному к ${}^tu$, тогда $N^\circ=u^{-1}(0)$. Пусть φ — каноническое отображение F на F/N°; тогда $u=w\circ\varphi$, где w — взаимно однозначное линейное отображение F/N° в F_1. Пространства F/N° и N находятся в двойственности и из (1) следует, что

$$\langle w(\dot{y}),\ z_1\rangle=\langle \dot{y},\ {}^tu(z_1)\rangle,$$

каковы бы ни были $\dot{y}\in F/N^\circ$ и $z_1\in G_1$. Это соотношение показывает, что w есть изоморфизм пространства F/N°, наделенного топологией $\sigma(F/N^\circ, N)$, на $u(F)$, наделенное топологией, индуцируемой топологией $\sigma(F_1, G_1)$. Но, как известно, для того, чтобы $\sigma(F/N^\circ, N)$ было фактортопологией топологии $\sigma(F, G)$ по N°, необходимо и достаточно, чтобы N было замкнуто в топологии $\sigma(G, F)$ (§ 1, предложение 7). Тем самым предложение доказано.

Следствие. *Если u — гомоморфизм F на $u(F)\subset F_1$, то слабое сопряженное подпространства $u(F)$ пространства F_1 изоморфно подпространству ${}^tu(G_1)$ пространства G.*

Действительно, тогда $u(F)$, наделенное топологией, индуцируемой топологией $\sigma(F_1, G_1)$, изоморфно пространству F/N°, наделенному

топологией $\sigma(F/N^\circ, N)$; но сопряженное к последнему отождествимо с N, а слабая топология $\sigma(N, F/N^\circ)$ есть топология, индуцируемая в N топологией $\sigma(G, F)$ (§ 1, предложение 6).

Замечания. 1) Не следует думать, что если u есть гомоморфизм F на $u(F)$ при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, то ${}^t u$ будет гомоморфизмом G_1 на $u(G_1)$ при топологиях $\sigma(G_1, F_1)$ и $\sigma(G, F)$ или, другими словами, что $u(F)$ будет замкнуто в F_1 в топологии $\sigma(F_1, G_1)$ (упражнение 10).

2) Пусть M — векторное подпространство пространства F, замкнутое в топологии $\sigma(F, G)$. Наделим факторпространство $F_1 = F/M$ фактортопологией топологии $\sigma(F, G)$ по M и пусть G_1 — сопряженное к F_1. Каноническое отображение φ пространства F на F_1 есть тогда гомоморфизм, а сопряженное к нему отображение — изоморфизм G_1 на M° при топологиях $\sigma(G_1, F_1)$ и $\sigma(G, F)$; точно говоря, какова бы ни была непрерывная линейная форма y' на F_1, ${}^t\varphi(y')$ будет непрерывной линейной формой $y' \circ \varphi$ на F.

Пусть, с другой стороны, ψ — каноническое вложение M в F и M' — сопряженное к M, наделенному топологией, индуцируемой топологией $\sigma(F, G)$. Как мы знаем, ψ есть тогда изоморфизм при топологиях $\sigma(M, M')$ и $\sigma(F, G)$; его сопряженное ${}^t\psi$ есть гомоморфизм G на M', с ядром M°, при топологиях $\sigma(G, F)$ и $\sigma(M', M)$ (§ 1, предложения 6 и 7); точно говоря, какова бы ни была непрерывная линейная форма x' на F, ${}^t\psi(x')$ есть сужение x' на подпространство M пространства F.

Предложение 5. *Пусть u — линейное отображение F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$. Для того чтобы u было сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы ${}^t u$ было изоморфизмом G_1 на ${}^t u(G_1)$ при топологиях $\sigma(G_1, F_1)$ и $\sigma(G, F)$.*

Действительно, сказать, что $u(F) = F_1$, все равно, что сказать, что $u(F)$ замкнуто и всюду плотно в F_1; поэтому справедливость утверждения вытекает из предложения 3 и предложения 4 (примененного к ${}^t u$).

2. Слабая и сильная непрерывность.

Предложение 6. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства, u — линейное отображение E в F и u' — линейное отображение F' в E'. Рассмотрим следующие свойства:*

а) *u непрерывно при исходных топологиях в E и F;*

б) *u непрерывно при ослабленных топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$;*

в) *u' непрерывно при слабых топологиях* $\sigma(F', F)$ *и* $\sigma(E', E)$;
г) *u' непрерывно при сильных топологиях в F' и E'.*
Тогда а) $\Rightarrow$ б) *и* в) $\Rightarrow$ г).

1° Если u непрерывно при исходных топологиях, то для каждого $y' \in F'$ линейная форма $x \to \langle u(x), y' \rangle$ непрерывна в исходной топологии пространства E, а значит, и в топологии $\sigma(E, E')$, что и доказывает, что u непрерывно при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$.

2° Если u' непрерывно при $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$, то можно написать $u' = {}^t u$, где u — отображение, сопряженное к u', — непрерывно при $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$ (предложение 1). По определению сильной топологии, остается доказать, что для каждого ограниченного множества A из E существует ограниченное множество B в F такое, что ${}^t u(B^\circ) \subset A^\circ$. Но $u(A)$ ограниченно в F в топологии $\sigma(F, F')$ (гл. III, § 2, следствие 2 предложения 5), а, значит, также и в исходной топологии пространства F (§ 2, теорема 3), и в силу предложения 2 достаточно принять $B = u(A)$.

Следствие. *Каждое линейное отображение u пространства E в F, непрерывное при исходных топологиях, непрерывно и при ослабленных топологиях, а его сопряженное слабо и сильно непрерывно.*

Достаточно применить следствие предложения 1 к u и предложение 6 к $u' = {}^t u$.

В обозначениях предложения 6, импликации б) $\Rightarrow$ а) и г) $\Rightarrow$ в) вообще не верны.

Например, если F и G — векторные пространства в двойственности такие, что $\sigma(F, G) \neq \tau(F, G)$, то тождественное отображение F, наделенного топологией $\sigma(F, G)$, на F, наделенное топологией $\tau(F, G)$, при ослабленных топологиях непрерывно, а при исходных нет. Пример, где г) не влечет в), доставляют сильно непрерывные линейные формы на F', не являющиеся слабо непрерывными, в случае, когда F не совпадает алгебраически со своим вторым сопряженным (а за E принято тело скаляров). Однако справедливы следующие два предложения:

Предложение 7. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Каждое линейное отображение u пространства E в F, непрерывное при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$, непрерывно и при топологиях $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$.*

Действительно, пусть $W = K'^{\circ}$ — окрестность нуля в F для топологии $\tau(F, F')$, где K' — слабо компактное уравновешенное выпуклое множество из F'. Так как ${}^t u$ непрерывно при слабых топологиях в F' и E' (следствие предложения 1), то $H' = {}^t u(K')$ есть слабо компактное уравновешенное выпуклое множество в E'. Следовательно, H'° есть окрестность нуля в E для топологии $\tau(E, E')$, чем предложение и доказано, поскольку $H'^{\circ} = \overset{-1}{u}(K'^{\circ})$ (предложение 2).

Следствие. *Если исходной топологией в E служит $\tau(E, E')$, то каждое линейное отображение u пространства E в F, непрерывное при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$, непрерывно и при исходных топологиях.*

Достаточно заметить, что исходная топология в F мажорируется топологией $\tau(F, F')$ (§ 2, следствие теоремы 2).

Отметим, что это следствие применимо, в частности, когда E *бочечно* (§ 2, предложение 5), а также когда E *метризуемо* (§ 2, предложение 6).

Предложение 8. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Если F полурефлексивно, то каждое линейное отображение u' пространства F' в E', непрерывное при сильных топологиях, непрерывно и при слабых топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$.*

Действительно, предложение 6 показывает, что u' непрерывно при топологиях $\sigma(F', F'')$ и $\sigma(E', E'')$, и справедливость утверждения следует из того, что $\sigma(F', F'') = \sigma(F', F)$ в силу предположения, а $\sigma(E', E'')$ мажорирует топологию $\sigma(E', E)$,

Предложение 9. *Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Каждое линейное отображение u пространства E в F, являющееся гомоморфизмом E на $u(E)$ при исходных топологиях в E и F, есть также гомоморфизм E на $u(E)$ при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$.*

Пусть $N = \overset{-1}{u}(0)$, H — факторпространство E/N, наделенное фактортопологией исходной топологии пространства E по N, и φ — каноническое отображение E на H. Тогда $u = v \circ \varphi$, где v — инъек-

тивное линейное отображение H в F, непрерывное при исходных топологиях этих пространств. Так как φ есть гомоморфизм E на H при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(H, H')$ (§ 2, предложение 9), то остается доказать, что v есть изоморфизм H на $u(E)$ при топологиях $\sigma(H, H')$ и $\sigma(F, F')$. Но v, по предположению, есть изоморфизм H на $u(E)$ при исходных топологиях пространств H и F, так что справедливость утверждения вытекает из предложения 8 § 2.

Упражнения. *1) Пусть E и F — векторные пространства, E^* и F^* — их алгебраические сопряженные. Показать, что если u — линейное отображение F^* в E, непрерывное при топологиях $\sigma(F^*, F)$ и $\sigma(E, E^*)$, то $u(F^*)$ конечномерно. [С помощью предложения 4 показать, что u есть гомоморфизм F^* на $u(F^*)$, и вывести отсюда, что $u(F^*)$ есть подпространство минимального типа пространства E (§ 1, упражнение 13); в заключение рассмотреть ограниченные множества в этом подпространстве.]

2) Пусть (F, G) и (F_1, G_1) — две пары векторных пространств в двойственности.

а) Для того чтобы линейное отображение u пространства F в F_1 было непрерывным при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, необходимо и достаточно, чтобы его алгебраическое сопряженное ${}^tu$ (Алг., гл. II § 4, п° 9) было отображением F_1^* в F^* таким, что ${}^tu(G_1) \subset G$.

б) Пусть $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}_1$ — насыщенные множества подмножеств из G и G_1, ограниченных в топологиях $\sigma(G, F)$ и $\sigma(G_1, F_1)$ соответственно (гл. III, § 3, упражнение 2). Для того чтобы линейное отображение u пространства F в F_1, непрерывное при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$, было непрерывным при $\mathfrak{T}$-топологии в F и $\mathfrak{T}_1$-топологии в F_1, необходимо и достаточно, чтобы ${}^tu(\mathfrak{T}_1) \subset \mathfrak{T}$.

3) Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства.

а) Для того чтобы линейное отображение u пространства E в F было гомоморфизмом E на $u(E)$ при исходных топологиях в E и F, необходимо и достаточно, чтобы u было гомоморфизмом при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$ и каждое равностепенно непрерывное множество из E', содержащееся в ${}^tu(F')$, было образом равностепенно непрерывного множества из F' при сопряженном отображении ${}^tu$. [Для установления достаточности условия свести к случаю, когда u инъективно (см. упражнение 4).]

б) Показать, что если топология, индуцируемая в каждом векторном подпространстве N пространства F топологией $\tau(F, F')$, совпадает с $\tau(N, F'/N^\circ)$, то каждый гомоморфизм E в F при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$ есть также гомоморфизм при топологиях $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$. [См. § 2, упражнение 5а.] Случай, когда F метризуемо.

4) Пусть E — отделимое вещественное локально выпуклое пространство, такое, что в его сопряжении E' содержится бесконечно-

мерное выпуклое множество B', компактное в слабой топологии $\sigma(E', E)$ (условие, осуществляющееся, например, когда E — бесконечномерное векторное пространство, наделенное топологией $\sigma(E, E^*)$). Показать, что существует линейная форма $u \in E'^*$, не ограниченная на B'; вывести отсюда, что B' не компактно в топологии $\sigma(E', F)$, где F — подпространство $E + \mathbf{R}u$ пространства E'^*. Заключить отсюда, что тождественное отображение E в F есть изоморфизм при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, E')$, но не при топологиях $\tau(E, E')$ и $\tau(F, E')$.

5) а) Пусть E и F — пространства Фреше. Доказать равносильность следующих пяти свойств линейного отображения u пространства E в F:

α) u есть гомоморфизм E на $u(E)$ при исходных топологиях в E и F;

β) u есть гомоморфизм E на $u(E)$ при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$;

γ) $u(E)$ замкнуто в F;

δ) ${}^t u$ есть гомоморфизм F' на ${}^t u(F')$ при слабых топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$;

ε) ${}^t u(F')$ замкнуто в E' в топологии $\sigma(E', E)$.

[Использовать предложение 4, упражнение 3б, а также теорему 1 § 3 гл. I.]

б) Дать пример изоморфизма u пространства Фреше E в пространство Фреше F, для которого ${}^t u$ не было бы гомоморфизмом F' на ${}^t u(F')$ при сильных топологиях в F' и E'. [См. § 3, упражнение 23в.]

*6) Пусть E и F — пространства Фреше и u — непрерывное линейное отображение E в F. Показать, что если ${}^t u$ есть изоморфизм F' на ${}^t u(F')$ при сильных топологиях в F' и E', то u есть гомоморфизм E на F. [Использовать предыдущее упражнение 5 и теорему 5 § 2; см. § 5, упражнение 11.]

7) Пусть E и F — локально выпуклые пространства, u — непрерывное линейное отображение E в F и A — всюду плотное векторное подпространство в E. Показать, что если сужение u на A есть гомоморфизм A на $u(A)$, то u есть гомоморфизм E на $u(E)$. [Использовать упражнение 3а.] Если, кроме того, $u(A) = F$, то $u(V)$ есть внутренность $\overline{u(V \cap A)}$ для каждой уравновешенной выпуклой открытой окрестности нуля V из E.

8) Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства. Для каждого подмножества H пространства $L(E, F)$ всех непрерывных линейных отображений E в F обозначим через ${}^t H$ миожество отображений F' в E', сопряженных к всевозможным отображениям $u \in H$. Для каждого множества M (соотв. N') из E (соотв. F') обозначим через $H(M)$ (соотв. ${}^t H(N')$) объединение всех множеств $u(M)$ (соотв. ${}^t u(N')$), где u пробегает H.

а) Для того чтобы H было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы ${}^t H(N') \subset E'$ было равностепенно непрерывно для каждого равностепенно непрерывного множества N' из F'.

б) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E. Показать, что для того чтобы H было ограниченным в $\mathfrak{S}$-топологии в $L(E, F)$, необходимо и достаточно, чтобы ${}^tH(y')$ было ограниченно в $\mathfrak{S}$-топологии в E' для каждого $y' \in F'$. [Использовать теорему 3 § 2.]

в) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E, $\mathfrak{T}$ — насыщенное множество (гл. III, § 3, упражнение 2) ограниченных подмножеств пространства F, и E' наделено $\mathfrak{S}$-топологией, а F' — $\mathfrak{T}$-топологией. Для того чтобы ${}^tH$ было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $H(B)$ для любого множества $B \in \mathfrak{S}$ содержалось в некотором множестве из $\mathfrak{T}$. В частности, для того чтобы ${}^tH$ было равностепенно непрерывным при сильных топологиях в F' и E', необходимо и достаточно, чтобы H было ограниченно в $L(E, F)$ в топологии ограниченной сходимости.

г) Вывести из б) и в), что если ${}^tH$ ограиичено в топологии простой сходимости в $L(F', E')$, где F' и E' наделены сильными топологиями, то оно равностепенно непрерывно при тех же топологиях.

9) В обозначениях упражнения 8:

а) Показать, что если E бочечно, то следующие свойства равносильны:

α) H ограниченно в $L(E, F)$ в топологии простой сходимости;

β) H равностепенно непрерывно;

γ) ${}^tH$ ограниченно в топологии простой сходимости в $L(F', E')$ при наделении E' слабой топологией $\sigma(E', E)$;

δ) ${}^tH$ равностепенно непрерывно, когда E' и F' наделены сильными топологиями.

б) Показать, что если E инфрабочечно, то свойства β) и δ) из а) равносильны друг другу, а также следующим двум другим:

ε) H ограниченно в $L(E, F)$ в топологии ограниченной сходимости;

φ) ${}^tH$ ограниченно в топологии простой сходимости в $L(F', E')$ при наделении E' сильной топологией.

в) Показать, что если E квазиполно, то свойства α), γ) и δ) из а) равносильны.

*10) Пусть G — векторное подпространство произведения $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, отличное от $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, содержащее прямую сумму $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ и наделенное локально выпуклой топологией, превращающей G в метризуемое монтелевское (следовательно, полное; см. § 3, упражнение 21г) пространство (по поводу способа построения таких пространств см. § 3, упражнение 27). Пусть G' — сопряженное к G, отождествленное с подпространством произведения $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ посредством билинейной канонической формы $\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n x'_n$, где $x = (x_n) \in G$, $x' = (x'_n) \in G'$.

Пусть H — пространство всех двойных последовательностей $t = (t_{mn})$, в которых $t_{mn} \neq 0$ лишь для конечного числа индексов n и $(t_{mn})_{m \in \mathbf{N}} \in G'$

для каждого n; H можно рассматривать как прямую сумму $G'^{(\mathbf{N})}$, и мы наделим H прямой суммой топологий его слагаемых, превращающей его в монтелевское пространство (§ 3, упражнение 25); пространство H', сопряженное к H, отождествимо с пространством всех двойных последовательностей $t' = \left(t'_{mn}\right)$ таких, что последовательность $\left(t'_{mn}\right)_{m\in\mathbf{N}}$ для каждого n принадлежит G (пространством, изоморфным произведению $G^{\mathbf{N}}$). Пусть K — пространство, получающееся из H посредством „симметрии“ $(t_{mn}) \to (t_{nm})$ в $\mathbf{R}^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$, и K' — его сопряженное, получающееся из H' посредством симметрии $\left(t'_{mn}\right) \to \left(t'_{nm}\right)$.

Пусть P — пространство всех тройных последовательностей (s_{mnp}), в которых $s_{mnp} \neq 0$ лишь для конечного числа индексов p и $(s_{mnp})_{(m,\,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ принадлежит H для каждого p; P можно рассматривать как прямую сумму $H^{(\mathbf{N})} = G'^{(\mathbf{N}\times\mathbf{N})}$, и мы наделим P прямой суммой топологий его слагаемых, так что оно будет в этой топологии монтелевским пространством. Пусть Q — пространство всех тройных последовательностей (s_{mnp}) таких, что последовательность $(s_{mnp})_{(m,\,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ для каждого p принадлежит K; Q можно рассматривать как произведение $K^{\mathbf{N}}$, и мы наделим его произведением топологий его множителей, превратив его тем самым в монтелевское пространство. Пусть, наконец, $E = P \bigcap Q$ — пространство всех последовательностей (s_{mnp}), содержащих лишь конечное число ненулевых членов, отождествимое с прямой суммой $\mathbf{R}^{(\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N})}$; наделим E прямой суммой топологий его слагаемых, так что пространством E', сопряженным к E, будет тогда произведение $\mathbf{R}^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$.

а) Пусть u — инъективное линейное отображение $x \to (x, x)$ пространства E в монтелевское пространство $F = P \times Q$. Показать, что u непрерывно и $M = u(E)$ замкнуто в F; вывести отсюда, что ${}^t u$ есть гомоморфизм F' на ${}^t u(F')$ при слабых и сильных топологиях. [Использовать предложение 4 и упражнение 3б.] Показать, что $N = {}^t u(F')$ всюду плотно и не замкнуто в E' как при слабой, так и при сильной топологиях. [Заметить, что ${}^t u$ есть отображение $(y', z') \to y' + z'$ произведения $P' \times Q'$ в E'.]

б) Вывести из а), что факторпространство полного пространства F' (наделенного сильной топологией) по замкнутому подпространству M° не полуполно (гл. III, § 3, упражнение 10), хотя F' и является строгим индуктивным пределом последовательности метризуемых монтелевских пространств.

в) Показать, что замкнутое подпространство M пространства F не является ограничению замкнутым, хотя F и ограничению замкнуто. [Доказать, что пространство, сопряженное к M, не полно в сильной топологии.]

г) Пусть x' — элемент из E', не принадлежащий $N = {}^t u(F')$, и для каждого $y \in M$ пусть $v(y) = \langle x, x' \rangle$, где $u(x) = y$. Показать, что сужение v на каждое ограниченное множество из M непрерывно в ослабленной топологии, но v не непрерывно в топологии, индуци-

руемой из F. Вывести отсюда, что $L = v^{-1}(0)$ есть векторное подпространство сопряженного F к F', пересечение которого с каждым замкнутым ограниченным (а следовательно, слабо и сильно компактным) множеством из F замкнуто и которое тем не менее не замкнуто в F (см. § 2, теорема 5).

*11 а) Пусть E — пространство Фреше, на котором не существует непрерывной нормы. Показать, что в E содержится бесконечномерное подпространство минимального типа (§ 1, упражнение 13), тем самым обладающее топологическим дополнением в E. [Пусть (V_n) — строго убывающая фундаментальная система окрестностей нуля в E и (x_n) — последовательность точек из E такая, что $x_n \notin V_{n+1}$ и прямая, проходящая через 0 и x_n, содержится в V_n, причем x_n линейно независимы. Показать, что замкнутое векторное подпространство, порожденное точками x_n, обладает требуемым свойством.]

б) Пусть E — пространство Фреше, топология которого не может быть определена одной нормой, но определяется возрастающей последовательностью (p_n) норм. Пусть V_n — окрестность нуля, определяемая неравенством $p_n(x) \leqslant 1$, и $A'_n = V_n^\circ$ — ее поляра в E'; можно предполагать, что A'_{n+1} не содержится в векторном подпространстве пространства E', порожденном множеством A'_n (§ 2, упражнение 12в). Пусть (x'_n) — последовательность точек из E' такая, что $x'_n \in A'_n$ и x'_n не принадлежит векториому подпространству, порожденному множеством A'_{n-1}. Показать, что векторное подпространство M', порожденное последовательностью (x'_n), слабо замкнуто [§ 2, теорема 5] и не обладает топологическим дополнением в слабом сопряженном к E. [Принять во внимание, что если бы существовал слабо непрерывный проектор u' пространства E' на M', то $u'(A'_1)$, в силу теоремы Бэра, содержалось бы в одном из множеств $M' \cap A'_n$, и получить отсюда противоречие с тем, что A'_1 слабо тотально в E'.] Вывести отсюда, что подпространство M'° пространства E не обладает топологическим дополнением.

в) Пусть E — пространство Фреше, топология которого не может быть определена одной нормой. Показать, что если E не изоморфно произведению банаховских пространств, то в E содержится замкнутое векторное подпространство, не обладающее топологическим дополнением. [Рассуждать от противного. Пусть $(p_n)_{n \geqslant 1}$ — возрастающая последовательность полунорм на E, определяющая топологию этого пространства, $F_n = p_n^{-1}(0)$ и E_{n+1} — топологическое дополнение к F_{n+1} относительно F_n (полагаем $E = F_0$); используя б), показать, что E_{n+1} — банаховское пространство и E изоморфно произведению пространств E_n $(n \geqslant 1)$; использовать теорему 1 § 3 гл. I.]

*12) а) Пусть E и F—пространства Фреше, G—отделимое локально выпуклое пространство, E', F' и G' — их сопряженные и u — билинейное

отображение $E' \times F'$ в G', раздельно непрерывное (гл. III, § 4, п° 1), когда E', F' и G' наделены слабыми топологиями $\sigma(E', E)$, $\sigma(F', F)$ и $\sigma(G', G)$. Показать, что u есть непрерывное отображение $E' \times F'$ в G' при наделении E', F' и G' сильными топологиями. [Полагая $\langle z, u(x', y')\rangle = \langle v_z(x'), y'\rangle$, где $z \in G$ и $v_z(x') \in F$, показать сначала, что множество, пробегаемое v_z, когда z пробегает ограниченное множество C из G, равностепенно непрерывно при наделении E' сильной топологией, а F — исходной; использовать для этого упражнение 8г. Затем показать, что в E' существует сильная окрестность нуля V' такая, что объединение множеств $v_z(V')$, где z пробегает C, ограниченно в F; использовать для этого упражнение 5 § 2 гл. III.]

б) Дать пример нарушения справедливости заключения из а) при предположении E пространством Фреше, а F — строгим индуктивным пределом последовательности пространств Фреше. [См. гл. III, § 4, упражнение 5.]

§ 5. Двойственность банаховских пространств

Принимая во внимание важность банаховских пространств, мы в этом параграфе заново изложим для них результаты, полученные в предыдущих параграфах, и пополним эти результаты некоторыми свойствами, специфичными для банаховских пространств.

1. Слабая и сильная топологии в сопряженном к нормированному пространству

Пусть E — нормированное пространство и $\hat{E}$ — банаховское пространство, получающееся путем его пополнения. Как известно, пространство E', сопряженное к E, канонически отождествимо (как не топологическое векторное пространство) с сопряженным к $\hat{E}$; кроме того, сильная топология в E' (рассматривается ли оно как сопряженное к E или к $\hat{E}$) — одна и та же и определяется *нормой*

$$\|x'\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| = \sup_{x \in \hat{E},\ \|x\| \leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| \qquad (1)$$

(гл. III, § 3, п° 3). Напротив, при $\hat{E} \neq E$ слабые топологии $\sigma(E', E)$ и $\sigma(E', \hat{E})$ *различны* (§ 1, следствие 3 предложения 1).

Замечания. 1) Пусть A — всюду плотное подмножество шара $\|x\| \leqslant 1$ (относительно исходной топологии пространства E). Вследствие непрерывности x', из (1) вытекает, что также

$$\|x'\| = \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle|.$$

В частности, в последних двух членах в (1) можно знаки $\leqslant$ заменить на $<$.

2) Если E бесконечномерно, то слабая топология $\sigma(E', E)$ *слабее* сильной топологии пространства E'. Действительно, для любой конечной последовательности точек $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ из E существует $x'\neq 0$ в E' такое, что $\langle a_i, x'\rangle = 0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ (Алг., гл. II, § 4, теорема 1). При этом можно предполагать, что $\|x'\| = 1$. Это показывает, что 0 является в E' слабой точкой прикосновения к сфере, заданной уравнением $\|z'\| = 1$, тогда как эта сфера замкнута в сильной топологии.

Формула (1) показывает, что

$$|\langle x, x'\rangle| \leqslant \|x\|\,\|x'\| \tag{2}$$

для любых $x\in E$, $x\in E'$ и, следовательно, каноническая билинейная форма $(x, x')\to\langle x, x'\rangle$ *непрерывна* на $E\times E'$, когда E и E' наделены своими нормированными топологиями (см. § 3, упражнение 2).

Замечания. 1) Так как $\langle \lambda x, x'\rangle = \lambda\langle x, x'\rangle$, то можно также написать

$$\|x'\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|=1} |\langle x, x'\rangle|$$

и

$$\|x'\| = \sup_{x\in E,\ x\neq 0} \frac{|\langle x, x'\rangle|}{\|x\|},$$

что представляет собой уточнение формулы (2). Точно так же, каково бы ни было множество D, всюду плотное в E (в исходной топологии) и не содержащее начала, по непрерывности имеем

$$\|x'\| = \sup_{x\in D} \frac{|\langle x, x'\rangle|}{\|x\|}.$$

2) Если H — замкнутая гиперплоскость в E, определяемая уравнением $\langle x, x'\rangle = \alpha$ $(x'\neq 0)$, то *расстояние* от 0 до H задается формулой

$$d = \frac{|\alpha|}{\|x'\|}.$$

Действительно, в силу формулы (2), для каждого $x\in H$ имеем $\|x\| \geqslant \frac{|\alpha|}{\|x'\|}$; с другой стороны, для каждого n существует y_n такое, что $\|y_n\| = 1$ и $\langle y_n, x'\rangle \geqslant \|x'\|\left(1-\frac{1}{n}\right)$; пусть $\langle y_n, x'\rangle = \lambda_n$ и $x_n = \frac{\alpha y_n}{\lambda_n}$; тогда $x_n\in H$ и $\|x_n\| = \frac{|\alpha|}{|\lambda_n|} \leqslant \frac{|\alpha|}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x'\|}$, и наше утверждение доказано.

Напомним, что в силу метризуемости пространства E его исходная топология есть *топология Макки* $\tau(E, E')$ (§ 2, предложение 6).

Пространство E', наделенное сильной топологией, будучи метризуемым и квазиполным, полно (§ 3, предложение 3); иными словами, это — *банаховское пространство*. Так как полярой в E' шара $\|x\| \leqslant 1$ пространства E служит шар $\|x'\| \leqslant 1$, то равностепенно непрерывные множества в E' — это *сильно ограниченные* множества. Следовательно (§ 2, предложение 2):

Предложение 1. *В пространстве E', сопряженном к нормированному пространству E, каждый замкнутый шар компактен в слабой топологии $\sigma(E', E)$.*

Напомним, что метризуемое топологическое пространство называется *пространством счетного типа*, если в нем содержится счетное всюду плотное множество (Общ. топ., Рез., § 1, n° 14). Предложение 3 § 2 и его следствие показывают, что:

Предложение 2. *В пространстве E', сопряженном к нормированному пространству E счетного типа и наделенном слабой топологией $\sigma(E', E)$, каждый замкнутый шар есть метризуемое компактное пространство и содержит всюду плотное счетное множество.*

Если E — банаховское пространство, то оно бочечно (гл. III, §1, следствие предложения 1), так что каждое множество в E', ограниченное в слабой топологии $\sigma(E', E)$, также сильно ограниченно; поэтому можно говорить просто об *ограниченных* множествах в E', не уточняя — в какой топологии.

Отметим, что если E — не бочечное нормированное пространство, то в E' имеются слабо ограничеиные множества, не являющиеся сильно ограниченными (§ 2, упражнение 9а).

Предложение 3. *Пусть E — банаховское пространство. Для того чтобы векторное подпространство M' сопряженного пространства E' было замкнутым в топологии $\sigma(E', E)$, необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто в этой топологии его пересечение с шаром $\|x'\| \leqslant 1$.*

Это — не что иное, как теорема 5 § 2, примененная к банаховскому пространству (поскольку каждое равностепенно непрерывное множество из E' содержится в некотором гомотетичном образе шара $\|x'\| \leqslant 1$).

Следствие 1. *Пусть E — банаховское пространство. Для того чтобы линейная форма u на сопряженном пространстве E' была непрерывной в слабой топологии $\sigma(E', E)$, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывно в этой топологии ее сужение на шар $\|x'\| \leqslant 1$.*

Следствие 2. *Пусть E — банаховское пространство счетного типа. Для того чтобы линейная форма u на сопряженном пространстве E' была непрерывной в слабой топологии $\sigma(E', E)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x'_n) в E', сходящейся в этой топологии, имело место равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} u(x'_n) = u(\lim\limits_{n\to\infty} x'_n)$.

Действительно, шар $\|x'\| \leqslant 1$ является в топологии $\sigma(E', E)$ метризуемым компактным пространством (предложение 2) и справедливость утверждения вытекает из следствия 1 (см. Общ. топ., Рез., § 6, n° 2).

2. *Второе сопряженное к нормированному пространству. Рефлексивные банаховские пространства*

Так как сильное сопряженное E' к нормированному пространству E есть банаховское пространство, то его сильное сопряженное E'' — также банаховское, с нормой

$$\|x''\| = \sup_{x' \in E',\ \|x'\| \leqslant 1} |\langle x', x''\rangle|. \tag{3}$$

Как известно (§ 3, n° 3), E можно отождествить (как не топологическое векторное пространство) с некоторым подпространством пространства E''. Но здесь не только топология, индуцируемая в E сильной топологией пространства E'', совпадает с исходной топологией пространства E, но и сужение на E нормы $\|x''\|$, определенной формулой (3), совпадает с нормой, заданной на E; иными словами:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть E — нормированное пространство и E' — его сопряженное. Для каждого $x \in E$ имеем*

$$\|x\| = \sup_{x' \in E',\ \|x'\| \leqslant 1} |\langle x, x' \rangle|. \tag{4}$$

Действительно, так как шар $\|x\| \leqslant 1$ в E замкнут, а его полярой в E' служит шар $\|x'\| \leqslant 1$, то предложение 4 выражает, что шар $\|x\| \leqslant 1$ есть поляра в E шара $\|x'\| \leqslant 1$ (§ 2, следствие 2 предложения 4).

СЛЕДСТВИЕ. *Если E — счетного типа, то в E' существует последовательность (a'_n) такая, что*

$$\|x\| = \sup_n \frac{|\langle x, a'_n \rangle|}{\|a'_n\|}$$

для всех $x \in E$.

Действительно, шар $\|x'\| \leqslant 1$ в E' является в топологии $\sigma(E', E)$ метризуемым компактным пространством (предложение 2), так что в этом шаре существует всюду плотная в этой топологии последовательность ненулевых точек (a'_n) (Общ. топ., Рез., § 3, n° 12; гл. IX, § 2, n° 7). Пусть $x \in E$. Ясно, что для каждого $x' \in E'$ с $\|x'\| \leqslant 1$ имеет место неравенство $|\langle x, x' \rangle| \leqslant \sup_n |\langle x, a'_n \rangle|$. А тогда формула (4) показывает, что $\|x\| \leqslant \sup_n |\langle x, a'_n \rangle| \leqslant \sup_n \frac{|\langle x, a'_n \rangle|}{\|a'_n\|}$. Противоположное неравенство очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть E — нормированное пространство. Его шар $\|x\| \leqslant 1$ плотен в шаре $\|x''\| \leqslant 1$ второго сопряженного E'' в слабой топологии $\sigma(E'', E')$.*

Действительно, пусть B — шар $\|x\| \leqslant 1$ пространства E (рассматриваемого как подпространство в E''). Шар $\|x''\| \leqslant 1$ пространства E'' является полярой $B^{\circ\circ}$ для B° (относительно двойственности между E'' и E'), так что справедливость утверждения следует из предложения 3 § 1.

Банаховское пространство E *замкнуто* в E'' в сильной топологии, но, в силу предложения 5, *всюду плотно* в E'' в слабой топологии $\sigma(E'', E')$.

Приведенное выше предложение 4 и теорема 2 § 3 показывают, что:

Предложение 6. *Для того чтобы нормированное пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы его шар $\|x\| \leqslant 1$ был компактен в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$.*

Отметим, что в этом случае E необходимо *полно*, и, значит, есть банаховское пространство, и что его сопряженное E' есть рефлексивное банаховское пространство (§ 3, предложение 5).

Пусть $E = \overline{\mathscr{K}(\mathbf{N})}$ — подпространство банаховского пространства $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ всех ограниченных последовательностей вещественных чисел (гл. I, § 1, n° 2, пример), образованное из всех последовательностей, стремящихся к нулю. E — не рефлексивное банаховское пространство, сопряженное E' к которому отождествимо с пространством $L^1(\mathbf{N})$ всех абсолютно суммируемых последовательностей (там же), а второе сопряженное E'' — с пространством $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ (см. упражнение 3).

В гл. V мы рассмотрим бесконечномерные рефлексивные банаховские пространства особенно важного типа; некоторые другие рефлексивные банаховские пространства встретятся в теории интегрирования (Интегрир., гл. V).

3. Непрерывные линейные отображения нормированного пространства в локально выпуклое пространство

Предложение 7. *Пусть E — нормированное пространство, F — локально выпуклое пространство и u — линейное отображение E в F. Следующие свойства равносильны:*

а) *u непрерывно при исходных топологиях;*

б) *u непрерывно при ослабленных топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$;*

в) *образ шара $\|x\| \leqslant 1$ при отображении u ограничен в F.*

Равносильность свойств а) и б) следует из предложений 6 и 7 § 4, поскольку исходная топология в E есть $\tau(E, E')$.

С другой стороны, утверждение, что надлежащий гомотетичный образ шара $\|x\| \leqslant 1$ переводится отображением u в любую окрестность нуля W пространства F, очевидно, означает, что u непрерывно (см. гл. III, § 2, упражнения 14 и 15).

При выполнении условий предложения 7 сопряженное отображение ${}^t u$ есть, как известно, отображение F' в E', непрерывное,

с одной стороны, при слабых топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$, а с другой — при сильных топологиях в F' и E' (§ 4, следствие предложения 6). Если также F — нормированное пространство, то этот результат допускает следующее уточнение:

Предложение 8. *Пусть E и F — нормированные пространства и u — непрерывное линейное отображение E в F. Тогда*

$$\|{}^t u\| = \|u\|. \tag{5}$$

Действительно, по определению (гл. III, § 3, n° 1, формула (2)) и принимая во внимание формулы (1) и (4) и определение сопряженного отображения, имеем:

$$\|{}^t u\| = \sup_{\|y'\| \leqslant 1} \|{}^t u(y')\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y'\| \leqslant 1} |\langle x,\ {}^t u(y')\rangle| =$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y'\| \leqslant 1} |\langle u(x),\ y'\rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \|u\|.$$

Замечание. Положим $B(x,\ y') = \langle u(x),\ y'\rangle = \langle x,\ {}^t u(y')\rangle$. Проведенное сейчас доказательство показывает, что B есть непрерывная билинейная форма на $E \times F'$, причем (Общ. топ., гл. X, § 2, n° 2)

$$\|B\| = \|u\|.$$

4. Сопряженное к подпространству и факторпространству нормированного пространства

Пусть E — нормированное пространство, M — его замкнутое векторное подпространство, F — факторпространство E/M и φ — каноническое отображение E на F; как известно, фактортопология топологии пространства E по M может быть определена нормой $\|y\| = \inf_{\varphi(x)=y} \|x\|$ (гл. II, § 5, n° 5). ${}^t\varphi$ есть тогда взаимно однозначное линейное отображение пространства F' на подпространство M° пространства E', ортогональное к M (§ 4, n° 1, замечание 2). Кроме того:

Предложение 9. *Отображение ${}^t\varphi$ есть изометрия пространства F', сопряженного к нормированному пространству $F = E/M$, на подпространство M° нормированного пространства E'.*

Действительно, для каждого $y' \in F'$ имеем

$$\|y'\| = \sup_{y \in F,\ \|y\| \leqslant 1} |\langle y, y' \rangle| = \sup_{x \in E,\ \|\varphi(x)\| < 1} |\langle \varphi(x), y' \rangle| = \sup_{x \in E,\ \|\varphi(x)\| < 1} |\langle x, {}^t\varphi(y') \rangle|.$$

Но открытый шар $\|y\| < 1$ пространства F есть образ открытого шара $\|x\| < 1$ пространства E при каноническом отображении φ; поэтому имеем также

$$\|y'\| = \sup_{x \in E,\ \|x\| < 1} |\langle x, {}^t\varphi(y') \rangle| = \|{}^t\varphi(y')\|,$$

и предложение доказано.

Пусть теперь ψ — каноническое отображение подпространства M в E. Его сопряженное ${}^t\psi$ есть линейное отображение E' на M', имеющее своим ядром подпространство M° пространства E, ортогональное к M (§ 4, п° 1, замечание 2). Пусть θ — каноническое отображение E' на E'/M° и ψ_1 — ассоциированное с ${}^t\psi$ взаимно однозначное отображение, определяемое формулой ${}^t\psi = \psi_1 \circ \theta$.

Предложение 10. *ψ_1 есть изометрия банаховского пространства E'/M° на банаховское пространство M'.*

Нужно доказать, что для каждой непрерывной линейной формы y' на M имеет место равенство $\|y'\| = \inf_{{}^t\psi(x') = y'} \|x'\|$. Но так как ${}^t\psi(x')$ — сужение линейной формы x' на M, то из формулы (1) сразу следует, что $\|{}^t\psi(x')\| \leqslant \|x'\|$. С другой стороны, в силу теоремы Хана — Банаха (гл. II, § 5, следствие 1 теоремы 1, и § 6, следствие 3 теоремы 1), на E существует непрерывная линейная форма z', продолжающая y' и такая, что $\|z'\| = \|y'\|$; так как ${}^t\psi(z') = y'$, то это и завершает доказательство нашего утверждения.

Предложение 11. *Замкнутое подпространство M и факторпространство E/M рефлексивного банаховского пространства E являются рефлексивными банаховскими пространствами.*

Действительно, из предложений 9 и 10 вытекает, что сильное сопряженное к замкнутому векторному подпространству M каждого банаховского пространства E может быть отождествлено с факторпространством E'/M° сильного сопряженного E' к E, а второе

сопряженное к M — с подпространством M_1 второго сопряженного E'' к E, ортогональным к M°. Если поэтому E рефлексивно, то $M_1 = M$ (§ 2, следствие 2 предложения 4), и, следовательно, M рефлексивно, как и его сопряженное E'/M°. Так как тогда E' рефлексивно и имеет своим сопряженным пространство E, то проведенное рассуждение, примененное к M°, показывает, что и E/M рефлексивно.

Упражнения. 1) Пусть E — банаховское пространство.

а) Показать, что расстояние $d(x, A)$ от точки $x \in E$ до замкнутого выпуклого множества A есть полунепрерывная снизу функция на E в топологии $\sigma(E, E')$.

б) Показать, что если E рефлексивно, то в каждом замкнутом выпуклом множестве $A \subset E$ существует точка x_0, для которой $\|x_0\|$ равно расстоянию от 0 до A. [Использовать то обстоятельство, что $\|x\|$ полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(E, E')$.] Если каждая граничная точка шара $\|x\| \leqslant 1$ является его экстремальной точкой (гл. II, § 4, n° 2), то точка x_0 единственна.

в) Вывести из а) и б), что если E рефлексивно и B — ограниченное замкнутое выпуклое множество в E, то существуют точки $x \in A$ и $y \in B$, для которых $\|x - y\| = d(A, B)$.

2) Пусть E — банаховское пространство и M — его замкнутое векторное подпространство. Показать, что если M и E/M рефлексивны, то E рефлексивно. [Показать, что для каждой непрерывной линейной формы u на сильном сопряженном E' к E существует элемент $x \in E$ такой, что $u(x') = \langle x, x' \rangle = 0$ для всех точек $x' \in M^\circ$.]

3) Пусть A — бесконечное множество.

а) Показать, что сильное сопряженное к банаховскому пространству $E = \overline{\mathscr{K}(A)}$ (§ 1, упражнение 1) отождествимо с банаховским пространством $L^1(A)$, а сильное сопряженное к $L^1(A)$ — с банаховским пространством $\mathscr{B}(A) = L^\infty(A)$. Вывести отсюда, что E не рефлексивно и E''/E бесконечномерно*). Если $A = \mathbf{N}$, то E и E' — банаховские пространства счётного типа, но E'' уже не есть пространство счетного типа. [Гл. I, § 2, упражнение 8.]

б) Пусть $x' = (x'(\alpha))_{\alpha \in A}$ — точка из $E' = L^1(A)$ такая, что $\|x'\| = \sum_\alpha |x'(\alpha)| = 1$ и $x'(\alpha) \neq 0$ для бесконечного множества индексов $\alpha \in A$. Показать, что в слабой топологии $\sigma(E', E)$ не существует замкнутой опорной гиперплоскости к (компактному) шару S', определяемому неравенством $\|y'\| \leqslant 1$, проходящей через точку x'.

---

*) Пример не рефлексивного вещественного банаховского пространства E, для которого E''/E одномерно и E изоморфно E'', см. в работе R. C. James, Ann. of Math., т. 52 (1950), стр. 518.

в) Пусть S'' — шар $\|x''\| \leqslant 1$ в $E'' = L^\infty(A)$ и S_0'' — выпуклое множество $S'' + (S'' \cap E)$. Показать, что S_0'' есть ограниченное выпуклое тело при сильной топологии в E'', но не обладает ни одной экстремальной точкой; вывести отсюда, что E'', наделенное нормой p, где $p(x'')$ — калибровочная функция множества S_0'', не изометрично никакому сопряженному банаховскому пространству и что S_0'' не замкнуто в $\sigma(E'', E')$ (хотя S'' компактно в $\sigma(E'', E')$, а $S'' \cap E$ сильно замкнуто).

* 4) Сохраним обозначения упражнения 3.

а) Показать, что если (x_n') — последовательность в E', стремящаяся к нулю в топологии $\sigma(E', E'')$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $H \subset A$ такое, что $\sum_{\alpha \notin H} |x_n'(\alpha)| \leqslant \varepsilon$ для каждого n. [Рассуждать от противного: показать, что если бы это свойство не имело места, то существовали бы число $\delta > 0$, возрастающая последовательность номеров (n_k) и возрастающая последовательность (H_k) конечных множеств из A такие, что $\sum_{\alpha \in H_{k-1}} |x_n'(\alpha)| \leqslant \frac{\delta}{8}$ для всех $n \geqslant n_k$, $\sum_{\alpha \notin H_k} |x_n'(\alpha)| \leqslant \frac{\delta}{8}$ для всех $n \leqslant n_k$ и $\sum_{\alpha \in H_k - H_{k-1}} |x_{n_k}'(\alpha)| \geqslant \frac{\delta}{2}$, и что это приводило бы к противоречию („метод скользящего горба")]. Вывести отсюда, что последовательность (x_n') сходится к нулю в сильной топологии.

б) Вывести из а), что каждое множество в E', компактное в топологии $\sigma(E', E'')$, сильно компактно. [Использовать упражнение 13б § 2.]

в) Показать, что в E' каждая последовательность Коши относительно топологии $\sigma(E', E'')$ сходится к некоторой точке, иначе говоря, что E' в топологии $\sigma(E', E'')$ *полуполно* (гл. III, § 3, упражнение 10). (Рассуждая от противного, как в а), и используя а), показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $H \subset A$ такое, что $\sum_{\alpha \notin H} |x_n'(\alpha)| \leqslant \varepsilon$ для каждого n.]

*5) Сохраним обозначения упражнения 3 и пусть E''' — сопряженное к $E'' = \mathscr{B}(A)$.

а) Пусть (K_n) — последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств из A и (x_n''') — последовательность элементов из E'''. Показать, что существует строго возрастающая бесконечная последовательность номеров (n_k) такая, что все элементы $y_n' = (x_n'''(e_\alpha))_{\alpha \in B}$, где $B = \bigcup_k K_{n_k}$ и $e_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ (кронекеровский

символ), принадлежат $L^1(B)$. [Пусть δ — произвольное число >0 и $(J_m)_{m\in\mathbf{N}}$ — разбиение $\mathbf{N}$ на бесконечные миожества. Рассуждая от противного, показать, что для каждого $x'''\in E'''$ существует номер m такой, что $|\langle x'', x'''\rangle|\leqslant\delta$ для всех $x''\in E''$, удовлетворяющих условиям $\|x''\|\leqslant 1$ и $x''(\alpha)\neq 0$ лишь для индексов $\alpha\in\bigcup_{n\in J_m} K_n$. Надлежащим образом применить этот результат последовательно к x'''_1, x'''_2, ...].

б) Вывести из а) и упражнения 4а, что если (x'''_n) — последовательность в E''', сходящаяся к нулю в топологии $\sigma(E''', E'')$, и $\tilde{x}'''_n$ — сужение x'''_n на сильно замкнутое подпространство E пространства E'', то $\lim_{n\to\infty}\|\tilde{x}'''_n\|=0$ в E'.

в) Вывести из б), что в E'' сильно замкнутое подпространство E не обладает топологическим дополнением. [Ограничиться случаем $A=\mathbf{N}$; пусть (e'_n) — последовательность непрерывных линейных форм на E, для которых $\langle x, e'_n\rangle = x(n)$; показать, что последовательность (e'_n) сходится к нулю в топологии $\sigma(E', E)$, но e'_n не могут быть продолжены до непрерывных линейных форм x'''_n на E'' так, чтобы последовательность (x'''_n) сходилась к нулю в топологии $\sigma(E''', E'')$.]

6) Показать, что банаховское пространство E, обладающее сильным сопряженным E' счетного типа и полуполное (гл. III. § 3, упражнение 10) в топологии $\sigma(E, E')$, рефлексивно. [См. упражиение 4в.]

7) Пусть E — банаховское пространство и G' — сильно замкнутое подпространство пространства E', являющееся в сильной топологии пространством счетиого типа. Показать, что G' изометричио сильно замкнутому подпространству пространства F', сопряженного к замкнутому подпространству F пространства E, порожденному некоторым счетным множеством точек из E. [Предположим, что (x'_n) — сильно плотная последовательность точек из G', и пусть $x_n\in E$ для каждого n таково, что $\|x_n\|\leqslant 1$ и $\langle x_n, x'_n\rangle = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x'_n\|$; показать, что сильно замкиутое подпространство F пространства E, порожденное точками x_n, обладает требуемым свойством.]

*8) Пусть E — банаховское пространство и B — шар $\|x\|\leqslant 1$ в E. Для того чтобы каждая точка из B обладала счетной фундаментальной системой окрестностей в топологии, индуцируемой в B ослабленной топологией $\sigma(E, E')$, необходимо и достаточно, чтобы E' было в сильной топологии пространством счетного типа. [Для доказательства необходимости условия принять во внимание, что если каждая точка в B обладает счетной фундаментальной системой окрестиостей в ослаб-

ленной топологии, то это же имеет место и в замыкании $B^{\circ\circ}$ множества B в E'' по топологии $\sigma(E'', E')$; тогда в E' существует последовательность (a'_n) такая, что каждая окрестность нуля в $B^{\circ\circ}$ для топологии $\sigma(E'', E')$ содержит пересечение $B^{\circ\circ}$ с конечным числом поляр $\{a'_n\}^\circ$; рассмотреть сильно замкнутое подпространство W' в E' порожденное точками a'_n, и подпространство W'° в E'', ортогональное к W'.]

*9) Пусть E — нерефлексивное банаховское пространство. Доказать, что в E существует нерефлексивное замкнутое подпространство M бесконечной факторразмерности. [Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в E, не обладающая в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ ни одной предельной точкой (§ 3, упражнение 7а); образовать по индукции подпоследовательность (x_{n_k}) и топологически свободную последовательность (y_k) такие, что $\|x_{n_k} - y_k\| \leqslant \frac{1}{k}$, и рассмотреть замкнутое векторное подпространство в E, порожденное точками y_{2k}.]

*10) Пусть E — нерефлексивное банаховское пространство счетного типа, M — нерефлексивное замкнутое векторное подпространство в E, имеющее бесконечную факторразмерность (упражнение 9), (x_n) — всюду плотная на сфере $\|x\| = 1$ последовательность ее точек и K — замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка последовательности $\left(\frac{x_n}{n}\right)$; K сильно компактно в E и $K + M = A$ есть замкнутое выпуклое множество [Общ. топ., гл. III, § 3, упражнение 15 ([28]).] Пусть S — шар $\|x\| \leqslant 1$ пространства E и $B = A \cap S$.

а) Показать, что 0 не есть внутренняя точка множества A, и вывести отсюда существование точки $x_0 \in E$ такой, что $\lambda x_0 \notin A$ для всех $\lambda > 0$. [См. гл. III, § 1, следствие предложения 1.]

б) Показать, что через 0 не проходит ни одной опорной гиперплоскости к B. [Принять во внимание, что такая гиперплоскость должна была бы служить опорной гиперплоскостью для K.]

в) Пусть $U_0 = M \cap S$ и $(U_n)_{n \geqslant 1}$ — убывающая последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств такая, что $U_1 \subset \frac{1}{2} U_0$ и пересечение всех U_n пусто (§ 3, упражнение 7а). Пусть C — замкнутая выпуклая оболочка объединения всех множеств $\frac{1}{n} x_0 + U_n$. Показать, что $B \cap C = \varnothing$, но не существует никакой замкнутой гиперплоскости, которая бы отделяла B и C. [Использовать б).]

*11) Пусть E и F — банаховские пространства и u — непрерывное линейное отображение E в F. Показать, что если ${}^t u$ есть гомоморфизм F' в E' при сильных топологиях, то u есть гомоморфизм E в F. [Использовать предложение 4 § 4 и теорему 5 § 2.]

*12) Пусть E и F — нормированные пространства и u — непрерывное линейное отображение E в F.

а) Показать, что если u — гомоморфизм E в F, то ${}^tu$ — гомоморфизм F' в E' при сильных топологиях. [См. § 4, предложения 4 и 9, и гл. I, § 3, теорема 1.]

б) Показать, что если E полно и ${}^tu$ — гомоморфизм F' в E' при сильных топологиях, то u — гомоморфизм E в F, а ${}^tu$ — гомоморфизм F' в E' при слабых топологиях. [Рассматривать F как подпространство его пополнения $\hat{F}$ и использовать упражнение 11.]

в) Дать пример, где E не полно, F полно, ${}^tu$ — изоморфизм F' в E' при сильных и слабых топологиях, но u не есть гомоморфизм E в F. [См. гл. II, § 5, упражнение 12.]

г) Дать пример, где E не полно, F полно, ${}^tu$ — изоморфизм F' в E' при сильных, но не при слабых топологиях, и u — изоморфизм E в F. [Взять E всюду плотным в F.]

д) Если F полно и ${}^tu$ — гомоморфизм F' в E' при слабых топологиях, то ${}^tu$ есть гомоморфизм F' в E' при сильных топологиях. [Принять во внимание, что $u(E)$ замкнуто в F, и продолжить u на $\hat{E}$.]

е) Дать пример, где E полно, F не полно и ${}^tu$ — изоморфизм F' в E' при слабых, но не при сильных топологиях. [См. гл. II, § 5, упражнение 12.]

13) Пусть E — бесконечномерное банаховское пространство, (a_n) — счетное свободное семейство точек в E, F_n — подпространство в E размерности n, порожденное точками a_i с индексами $i \leqslant n$, S_n — сфера $\|x\| = n$ в E и A_n — конечное множество в $S_n \cap F_n$ такое, что каждая точка из $S_n \cap F_n$ отстоит от него на расстояние $\leqslant \frac{1}{n}$. Показать, что пересечение множества $A = \bigcup_n A_n$ с каждым ограниченным множеством замкнуто и, однако, 0 есть точка прикосновения для A в ослабленной топологии *).

*14) Пусть E — банаховское пространство, S — шар $\|x\| \leqslant 1$ в E и S'_r — шар $\|x'\| \leqslant r$ в E'.

а) Пусть M'_1 и M'_2 — векторные подпространства пространства E', всюду плотные в слабой топологии $\sigma(E', E)$. Для того чтобы $\sigma(E, M'_1)$ и $\sigma(E, M'_2)$ индуцировали в S одну и ту же топологию, необходимо и достаточно, чтобы сильные замыкания M'_1 и M'_2 в E' совпадали.

б) Пусть M' — векторное подпространство в E', всюду плотное в топологии $\sigma(E', E)$; обозначим через $M'^{(1)}$ векторное подпространство, порожденное замыканием множества $M' \cap S'_1$ в E' в топологии $\sigma(E', E)$. Для того чтобы $M'^{(1)} = E'$, необходимо и достаточно, чтобы слабое за-

*) Этот (неопубликованный) результат сообщил нам M. Day.

мыкание множества $M' \cap S'_1$ содержало шар S'_r $(r > 0)$. [См. гл. III, § 1, следствие предложения 1.]

в) Пусть r — верхняя грань чисел t таких, что слабое замыкание множества $M' \cap S'_1$ содержит шар S'_t; r называется *характеристикой* подпространства M'. Показать, что r есть нижняя грань чисел

$$\sup_{x' \in M' \cap S'_1} \frac{|\langle x, x' \rangle|}{\|x\|},$$

где x пробегает множество всех ненулевых точек из E. [Использовать теорему Хана — Банаха.]

г) Показать, что $\frac{1}{r}$ равно верхней грани чисел $\|x\|$, где x пробегает замыкание шара S в E в топологии $\sigma(E, M')$. [Использовать в) и теорему Хана — Банаха.]

д) Пусть M'° — подпространство пространства E'', ортогональное к M'. Показать, что $r = \inf \frac{\|x + z''\|}{\|x\|}$, где z'' пробегает M'°, а x — множество всех ненулевых точек из E. [Использовать в) и теорему Хана — Банаха.] Вывести отсюда, что для того, чтобы $M'^{(1)} = E'$, необходимо и достаточно, чтобы $E + M'^{\circ}$ было сильно замкнуто в E''. [Использовать теорему 1 § 3 гл. I.]

е) Пусть $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $E = \overline{\mathscr{K}(A)}$ (упражнение 3) и P — векторное подпространство пространства $E'' = \mathscr{B}(A)$, образованное точками $x = (x_{ij})$ такими, что $x_{ij} = \frac{x_{0j}}{j+1}$ для всех $i > 0$. Показать, что $P = M'^{\circ}$, где M' — векторное подпространство пространства E', всюду плотное в топологии $\sigma(E', E)$, но $E + M'^{\circ} = E + P$ не является сильно замкнутым в E''. Вывести отсюда, что характеристика M' равна нулю.

*15) Пусть E — банаховское пространство и M' — сильно замкнутое векторное подпространство пространства E', всюду плотное в слабой топологии. M' называется *неприводимым*, если оно не содержит никакого отличного от него векторного подпространства N', сильно замкнутого и слабо всюду плотного в E'.

а) Показать, что для того, чтобы M' было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы подпространство M'° пространства E'', ортогональное к M', являлось топологическим дополнением к E в E'' (в сильной топологии). Вывести отсюда, что тогда $M'^{(1)} = E'$ (упражнение 14) и E изоморфно сильному сопряженному к банаховскому пространству M' (для структур топологического векторного пространства).

б) Показать, что для того, чтобы M' было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы единичный шар $\|x\| \leqslant 1$ пространства E был относительно компактен в E в топологии $\sigma(E, M')$. [Использовать упражнение 14а.]

в) Для того чтобы E было изоморфно (по структурам топологического векторного пространства) сильному сопряженному к банаховскому пространству, необходимо и достаточно, чтобы в E' содержалось неприводимое подпространство. Вывести отсюда, что банаховское пространство $\overline{\mathscr{K}(\mathbf{N})}$ не изоморфно сопряженному ни к какому банаховскому пространству [См. упражнение 5в.]

16) Пусть E — нерефлексивное банаховское пространство, E' — его сильное сопряженное, E'' — сильное сопряженное к E', E''' — сильное сопряженное к E'' и E^{IV} — сильное сопряженное к E'''.

а) Показать, что в E''' подпространство E' и подпространство E°, ортогональное к E (рассматриваемому как подпространство пространства E''), топологически дополнительны и что проекция E''' на E' есть непрерывное линейное отображение с нормой 1.

б) Показать, что E^{IV} есть топологическая прямая сумма подпространств E'° и E'', а также E'° и $E^{\circ\circ}$, а $E'' \cap E^{\circ\circ} = E$. Пусть v — линейное отображение E^{IV} на себя, являющееся на E'° тождеством, а на E'' — проекцией E'' на $E^{\circ\circ}$ параллельно E'°; показать, что v есть изометрия, но не непрерывно в топологии $\sigma(E^{\mathrm{IV}}, E''')$.

*17) а) Пусть E — банаховское пространство и $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — всюду плотное на единичной сфере $\|x\| = 1$ множество ее точек. Показать, что линейное отображение u пространства $L^1(A)$ в E, определенное формулой $u(t) = \sum_{\alpha\in A} t(\alpha)\, x_\alpha$ для всех $t = (t(\alpha))_{\alpha\in A} \in L^1(A)$, есть гомоморфизм $L^1(A)$ на E. [Использовать теорему 1 § 3 гл. I.] Вывести отсюда, что E изоморфно факторпространству пространства $L^1(A)$.

б) Получить из а) пример замкнутого подпространства пространства $L^1(\mathbf{N})$, не обладающего топологическим дополнением в $L^1(\mathbf{N})$. [Использовать упражнения 3, 4в и 6.]

18) а) Показать, что каждое вещественное (соотв. комплексное) банаховское пространство изометрично замкнутому подпространству банаховского пространства вида $\mathscr{C}(S, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathscr{C}(S, \mathbf{C})$), образованного всеми вещественными (соотв. комплексными) непрерывными функциями на некотором компактном пространстве S (Общ. топ., гл. X, § 5). [Использовать формулу (4).]

б) Вывести из а), что каждое отделимое локально выпуклое пространство E изоморфно подпространству локально выпуклого пространства вида $\mathscr{C}_c(L, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathscr{C}_c(L, \mathbf{C})$, образованного всеми вещественными (соотв. комплексными) непрерывными функциями на некотором локально компактном пространстве L и наделенного топологией компактной сходимости. [См. гл. II, § 5, предложение 7.] В частности, каждое пространство Фреше изоморфно замкнутому подпространству пространства $\mathscr{C}_c(L, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathscr{C}_c(L, \mathbf{C})$), где L локально компактно и счетно на бесконечности.

*19) а) Пусть E — бесконечномерное (вещественное или комплексное) нормированное пространство. Показать, что оно содержит после-

довательность (x_n) такую, что какова бы ни была ограниченная последовательность скаляров (λ_n), существует непрерывная линейная форма x' на E, для которой $\langle x_n, x'\rangle = \lambda_n$ при всех n. [Образовать последовательности $\left(x'_n\right)$ точек сопряженного пространства E' и (x_n) точек из E такие, что $\langle x_i, x'_j\rangle = \delta_{ij}$ и $\|x'_n\| \leqslant 2^{-n}$.].

б) Для того чтобы отделимое локально выпуклое пространство E обладало свойством, указанным в а), необходимо и достаточно, чтобы его пополнение ие было пространством минимальиого типа (§ 1, упражнение 13). [Использовать предложение 7 § 5 гл. II и предложение 10 § 2 гл. IV.]

*20) а) Пусть E и F — бесконечномерные *комплексные* нормированные пространства и u — взаимно однозначное отображение E на F, полулинейное относительно автоморфизма σ тела C и переводящее каждую замкиутую гиперплоскость из E в замкиутую гиперплоскость в F. Показать, что автоморфизм σ необходимо непрерывен (и, следовательно, есть тождество или автоморфизм $\xi \to \bar{\xi}$). [Рассуждать от противного. Пусть (x_n) — последовательность точек из E, удовлетворяющая условию упражнения 19а, и (λ_n) — ограниченная последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_n^{\sigma}| \geqslant n\|u(x_n)\|$ для всех n показать, что если $\langle x_n, x'\rangle = \lambda_n$ для всех n и a — точка из E, для которой $\langle a, x'\rangle = 1$, то $u(a)$ должно было бы принадлежать образу замкнутой гиперплоскости $\overset{-1}{x'}(0)$ при отображении u.]

б) Вывести из а), что u — непрерывное полулинейное отображение E на F. [Воспользоваться предложением 7.]

в) Пусть σ — разрывный автоморфизм тела C. Показать, что взаимно однозначное отображение $\left(\xi_n\right) \to \left(\xi_n^{\sigma}\right)$ произведения $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ на себя переводит каждую замкнутую гиперплоскость в замкиутую гиперплоскость. [См. § 2, предложение 10.]

*21) Пусть $a^{(n)}$ для каждого целого $n > 0$ — двойная последовательность $a^{(n)} = \left(a_{ij}^{(n)}\right)_{i \geqslant 1,\ j \geqslant 1}$, где $a_{ij}^{(n)} = j^n$ для каждой пары (i, j) с $i < n$ и $a_{ij}^{(n)} = i^n$ для каждой пары (i, j) с $i \geqslant n$. Пусть E — векторное пространство всех таких двойных последовательностей $x = (x_{ij})$ вещественных чисел, что $p_n(x) = \sum_{i,\ j} a_{ij}^{(n)} |x_{ij}| < +\infty$ для каждого целого $n > 0$; p_n — полунормы, определяющие в E топологию монтелевского пространства Фреше (§ 3, упражнение 27); пространство E', сопряженное к E, отождествимо с пространством всех последовательностей $x' = \left(x'_{ij}\right)$ таких, что $\sup_{i,\ j} \left|a_{ij}^{(n)}\right|^{-1} |x'_{ij}| < +\infty$ хотя бы для одного номера n (§ 1, упражнение 1в).

а) Для каждого $x = (x_{ij}) \in E$ положим $y_j = \sum_i x_{ij}$ (для всех $j \geqslant 1$). Показать, что $\sum_j |y_j| < +\infty$. Обозначим последовательность $(y_j) \in \in L^1(\mathbf{N})$ через $u(x)$; показать, что u — непрерывиое линейное отображение E в $F = L^1(\mathbf{N})$ и что какова бы ни была последовательность

$y' = (y'_i) \in F' = L^\infty(\mathbf{N})$, ${}^t u(y')$ есть последовательность $(z'_{ij}) \in E'$ такая, что $z'_{ij} = y'_j$ для каждого i. Вывести отсюда, что ${}^t u$ есть взаимно однозначное линейное отображение $L^\infty(\mathbf{N})$ на слабо замкнутое подпространство пространства E' и, следовательно, u — гомоморфизм E на $L^1(\mathbf{N})$ при исходных топологиях (§ 4, упражнение 5), а ${}^t u$ — изоморфизм $F' = L^\infty(\mathbf{N})$ на ${}^t u(F')$ при слабых топологиях $\sigma(F', F)$ и $\sigma(E', E)$.

б) Пусть $M = u^{-1}(0)$, так что $M^\circ = {}^t u(F')$. Показать, что прообраз топологии, индуцируемой в M° сильной топологией из E', относительно отображения ${}^t u$ есть топология равномерной сходимости на всех компактных множествах из $F = L^1(\mathbf{N})$. [См. § 2, теорема 5 и § 5, упражнение 4.] Вывести отсюда, что топология, индуцируемая в M° сильной топологией из E', отлична от сильной топологии $\beta(M^\circ, E/M)$ и что в топологии, которую индуцирует $\beta(E', E)$, M° не есть инфрабочечное пространство, хотя E', наделенное топологией $\beta(E', E)$, ограниченно замкнуто и бочечно (см. § 3, упражнения 10, 20 и 22); в частности, M° не рефлексивно. Показать, что в E/M имеются ограниченные множества, не являющиеся образами никаких ограниченных множеств из E при каноническом отображении E на E/M.

22) а) Пусть a и b — две точки нормированного пространства E. Обозначая через $\delta(A)$ диаметр ограниченного множества $A \subset E$, определим по индукции последовательность $(B_n)_{n \geqslant 1}$ ограниченных множеств из E следующими условиями: B_1 есть множество тех $x \in E$, для которых $\|x - a\| = \|x - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|$; B_n при $n > 1$ есть множество всех $x \in B_{n-1}$ таких, что $\|x - y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$ для всех $y \in B_{n-1}$. Показать, что пересечение всех множеств B_n сводится к точке $\frac{1}{2}(a + b)$. [Принять во внимание, что $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$.]

б) Вывести из а), что изометрия u вещественного банаховского пространства E на вещественное банаховское пространство F есть аффинное линейное отображение E на F.

ГЛАВА V

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА*)

(*Элементарная теория*)

§ 1. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

1. Эрмитовы формы.

На протяжении всей этой главы K означает тело вещественных или комплексных чисел; $\xi \to \bar{\xi}$ означает тождественный автоморфизм тела K, если $K = \mathbf{R}$, и автоморфизм, относящий каждому комплексному числу $\xi = \alpha + i\beta$ сопряженное комплексное число $\bar{\xi} = \alpha - i\beta$, если $K = \mathbf{C}$. Напомним следующее определение (Алгебра, гл. IX):

Определение 1. *Пусть E — векторное пространство над K. Полуторалинейной эрмитовой формой* (или просто *эрмитовой формой*, или еще *симметричной формой* при $K = \mathbf{R}$) *на $E \times E$* (или, допуская вольность речи, *на E*) *называется всякое отображение f произведения $E \times E$ в K, удовлетворяющее следующим условиям*:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1 + x_2,\ y) &= f(x_1,\ y) + f(x_2,\ y), \\ f(x,\ y_1 + y_2) &= f(x,\ y_1) + f(x,\ y_2), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} f(\lambda x,\ y) &= \lambda f(x,\ y), \\ f(x,\ \mu y) &= \bar{\mu} f(x,\ y), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$f(x,\ y) = \overline{f(y,\ x)}. \tag{3}$$

Заметим, что второе условие (1) и второе условие (2) являются следствиями трех остальных.

---

*) Обращаем внимание читателя, интересующегося специально гильбертовыми пространствами, на то, что в этой главе, за исключением n° 6 § 1, не применяются *никакие* результаты глав III и IV. Из материала же глав I и II используются лишь определения выпуклого множества и полунормы (гл. II, §§ 1, 5 и 6), а также понятия топологической прямой суммы (гл. I, § 1), тотального семейства и топологически свободного семейства (гл. I, § 2). Все применяемые в n° 6 § 1 результаты, относящиеся к баиаховским пространствам, изложены в § 5 главы IV, за исключением характеризации тотального семейства (гл. IV, § 1, следствие 1 предложения 1).

Из (1) и (2) сразу следует, что

$$f\Big(\sum_j \lambda_j x_j,\ \sum_k \mu_k y_k\Big) = \sum_{j,\,k} \lambda_j \overline{\mu}_k f(x_j,\ y_k). \tag{4}$$

В частности, если E конечномерно и $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — его базис, то для $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ и $y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ имеем

$$f(x,\ y) = \sum_{j,\,k} \alpha_{jk} \xi_j \overline{\eta}_k,$$

где $\alpha_{jk} = f(e_j,\ e_k)$; при этом тождество (3) равносильно условию, что $\alpha_{jk} = \overline{\alpha}_{kj}$ для каждой пары индексов j, k; из него, в частности, следует, что все α_{jj} вещественны.

В силу формулы (3), $f(x,\ x)$ для каждого $x \in E$ *вещественно*. При этом, как известно (Алг., гл. IX), значения формы $f(x,\ y)$ определяются значениями $f(x,\ x)$ по формуле

$$4f(x,\ y) = f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y), \text{ если } K = \mathbf{R}, \tag{5}$$

$$4f(x,\ y) = f(x+y,\ x+y) - f(x-y,\ x-y) + \\ + if(x+iy,\ x+iy) - if(x-iy,\ x-iy), \text{ если } K = \mathbf{C}. \tag{6}$$

Замечание. Отметим, что формула (6) справедлива для каждой полуторалинейной формы на $E \times E$ (т. е. каждой функции f, удовлетворяющей условиям (1) и (2), но не обязательно удовлетворяющей условию (3)). Это показывает, что при $K = \mathbf{C}$ полуторалинейиая форма f, для которой $f(x,\ x)$ вещественно при всех $x \in E$, необходимо эрмитова, ибо формула (6) дает тогда $f(y,\ x) = \overline{f(x,\ y)}$, поскольку $y + ix = i(x - iy)$.

Из формул (5) и (6) вытекает в частности:

Предложение 1. *Пусть f — эрмитова форма на E и M — векторное подпространство в E такое, что $f(x,\ x) = 0$ для всех $x \in M$. Тогда также $f(x,\ y) = 0$ для каждой пары точек x, y из M.*

Пусть f — эрмитова форма на E. Множество N всех $x \in E$ таких, что $f(x,\ y) = 0$ для каждого $y \in E$, есть векторное подпространство в E. Из формулы (3) следует, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod N$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod N$, то $f(x_1,\ y_1) = f(x_2,\ y_2)$; таким образом, положив $\dot{f}(\dot{x},\ \dot{y}) = f(x,\ y)$ для каждого $x \in \dot{x} \in E/N$ и каждого $y \in \dot{y} \in E/N$, мы получим на факторпространстве E/N полуторалинейную форму $\dot{f}$;

ясно, что она эрмитова и из отношения $\dot{f}(\dot{x}, \dot{y}) = 0$ для каждого $\dot{y} \in E/N$" следует $\dot{x} = 0$ в E/N, иначе говоря (Алг., гл. IX), что $\dot{f}$ *не вырождена.* $\dot{f}$ называется невырожденной эрмитовой формой, *ассоциированной с* f.

2. Положительные эрмитовы формы

Определение 2. *Эрмитова форма* f *на* E *называется положительной, если* $f(x, x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in E$.

Ясно, что эрмитовы формы на векторном пространстве E образуют векторное пространство *над телом* $\mathbf{R}$ (но не над телом $\mathbf{C}$ при $K = \mathbf{C}$). Из определения 2 следует, что положительные эрмитовы формы образуют в этом пространстве *выступающий заостренный выпуклый конус* (гл. II, § 1, n° 4).

Предложение 2. *Если* f *— положительная эрмитова форма, то*

$$|f(x, y)|^2 \leqslant f(x, x) f(y, y), \tag{7}$$

каковы бы ни были x *и* $y \in E$ (неравенство Коши—Буняковского*)).

Предположим сначала, что $f(y, y) \neq 0$. Для каждого $\xi \in K$ имеем

$$f(y, y) f(x + \xi y, x + \xi y) \geqslant 0$$

или

$$f(x, x) f(y, y) - |f(x, y)|^2 + \\ + (\bar{\xi} f(y, y) + \overline{f(x, y)})(\xi f(y, y) + f(x, y)) \geqslant 0.$$

Положив в этом неравенстве $\xi = -\dfrac{f(x, y)}{f(y, y)}$, получим (7). Аналогично рассуждаем, если $f(x, x) \neq 0$. Наконец, если $f(x, x) = f(y, y) = 0$, то неравенство $f(x + \xi y, x + \xi y) \geqslant 0$, справедливое для всех $\xi \in K$, запишется в виде

$$\bar{\xi} f(x, y) + \xi \overline{f(x, y)} \geqslant 0.$$

Положив в этом неравенстве $\xi = -f(x, y)$, получим $-2|f(x, y)|^2 \geqslant 0$, откуда $f(x, y) = 0$ и, значит, снова верно (7).

---

*) В оригинале: Коши—Шварца. — *Прим. перев.*

Следствие 1. *Если f — положительная эрмитова форма, то множество N всех тех $x \in E$, для которых $f(x, x) = 0$, совпадает с векторным подпространством всех $x \in E$ таких, что $f(x, y) = 0$ для каждого $y \in E$.*

Следствие 2. *Для того чтобы положительная эрмитова форма f была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \neq 0$ выполнялось неравенство $f(x, x) > 0$.*

Это непосредственно вытекает из следствия 1.

Ясно, что какова бы ни была положительная эрмитова форма f на E, ассоциированная с ней невырожденная эрмитова форма $\dot{f}$ (n° 1) является положительной эрмитовой формой на E/N.

Предложение 3. *Если f — положительная* (соотв. *невырожденная положительная*) *эрмитова форма на E, то функция $\sqrt{f(x, x)}$ есть полунорма* (соотв. *норма*) *на E.*

Требует доказательства лишь то, что $\sqrt{f(x, x)}$ удовлетворяет неравенству треугольника. Но

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + \overline{f(x, y)}$$

и потому, согласно неравенству Коши—Буняковского,

$$f(x+y, x+y) \leqslant f(x, x) + f(y, y) + 2\sqrt{f(x, x) f(y, y)} = \\ = \left(\sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}\right)^2. \qquad (8)$$

Замечания. 1) Пусть f — невырожденная положительная эрмитова форма и x, y — ненулевые векторы. Доказательство неравенства Коши—Буняковского показывает, что если в (7) имеет место равенство, то существует скаляр ξ такой, что $f(x + \xi y, x + \xi y) = 0$, так что $x + \xi y = 0$; иначе говоря, x и y линейно зависимы; обратное очевидно. Доказательство неравенства (8) показывает тогда, что равенство $\sqrt{f(x+y, x+y)} = \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}$ возможно лишь если x и y линейно зависимы; если $y = \lambda x$, то это равенство дает $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, откуда следует, что λ — *положительное вещественное число.*

2) Пусть f — положительная эрмитова форма на E и $\dot{f}$ — ассоциированная с ней невырожденная положительная эрмитова форма на E/N. Пространство, получаемое путем снабжения E/N нормой $\sqrt{\dot{f}(\dot{x}, \dot{y})}$, есть нормированное пространство, ассоциированное с E, снабженным полунормой $\sqrt{f(x, y)}$ (гл. II, § 5, n° 5).

3. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

Определение 3. *Предгильбертовым пространством называется множество E, наделенное структурой, определяемой заданием в E структуры векторного пространства над K и положительной эрмитовой формы. При $K = \mathbf{R}$* (соотв. $K = \mathbf{C}$) *E называется вещественным* (соотв. *комплексным*) *предгильбертовым пространством.*

Пример. Пусть I — интервал из $\mathbf{R}$ (ограниченный или нет) и E — множество всех правильных функций на $\mathbf{R}$ со значениями в $\mathbf{C}$ (Функц. вещ. перем., гл. II, § 1, n° 3), обращающихся каждая в нуль вне некоторого компактного множества, содержащегося в I. Очевидно, E — векторное пространство над $\mathbf{C}$. Пусть f — полуторалинейная форма $(x, y) \to \int_I x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$. Ясно, что f есть положительная эрмитова форма на E и, значит, определяет в E структуру предгильбертова пространства.

Когда в векторном пространстве E рассматривается лишь одна структура предгильбертова пространства, значение эрмитовой формы, определяющей эту структуру, для пары точек (x, y) из E обозначается $(x \mid y)$ и называется *скалярным произведением* x и y (*скалярным квадратом* x, если $y = x$). Векторы x, y называются *ортогональными*, если $(x \mid y) = 0$. Функция $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ есть тогда *полунорма* на векторном пространстве E (предложение 3); предгильбертово пространство всегда считается снабженным этой полунормой (и, следовательно, наделенным соответствующими топологией и равномерной структурой).

При этих обозначениях неравенство Коши—Буняковского в предгильбертовом пространстве E записывается в виде

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\| \tag{9}$$

и показывает, что скалярное произведение есть *непрерывная полуторалинейная форма* на $E \times E$ (гл. II, § 5, предложение 8).

Для *отделимости* E необходимо и достаточно, чтобы $\|x\|$ было *нормой* на E, иными словами, чтобы $(x \mid y)$ было *невырожденной положительной* эрмитовой формой; то же самое можно выразить, сказав, что 0 *есть единственный вектор в E, ортогональный к самому себе.*

Согласно общим определениям (Теор. мн., Рез., § 8), *изоморфизм* предгильбертова пространства E на предгильбертово пространство F есть взаимно однозначное линейное отображение u пространства E на F такое, что

$$(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) \tag{10}$$

для всех x и y из E. Отсюда вытекает, что $\|u(x)\| = \|x\|$ для всех $x \in E$, причем u, очевидно, есть изоморфизм для структур векторного пространства в E и F; если E и F отделимы, то u есть *изометрия* E на F.

Пример. Как известно (Алг., гл. IX), для каждой невырожденной положительной эрмитовой формы f на пространстве K^n существует взаимно однозначное линейное отображение u этого пространства на себя такое, что $f(u(x), u(y)) = (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$ (где ξ_i и η_i — соответственные координаты векторов x и y); форма $(x \mid y)$ при $K = \mathbf{R}$ есть не что иное, как евклидово скалярное произведение (Общ. топ., гл. VI, § 2). Тем самым два отделимых вещественных (соотв. комплексных) предгильбертовых пространства одной и той же конечной размерности n всегда *изоморфны*. (В § 2, предложение 7, мы увидим, как обобщается это свойство.)

Пусть E — *комплексное* предгильбертово пространство и $(x \mid y)$ — скалярное произведение на E. В множестве E можно определить вторую структуру векторного пространства относительно $\mathbf{C}$, сохраняя ту же групповую операцию и принимая за закон внешней композиции $(\lambda, x) = \bar{\lambda} x$ (Алг., гл. II, Приложение, п° 2); при этой структуре векторного пространства $(x, y) \to (y \mid x)$ есть *положительная эрмитова · полуторалинейная форма*. Предгильбертово пространство E_1, получающееся путем наделения E этой новой структурой векторного пространства и этой новой эрмитовой формой, мы будем называть *дуальным* к пространству E. Изоморфизм u пространства E на E_1 есть *полулинейное* (относительно автоморфизма $\xi \to \bar{\xi}$ тела $\mathbf{C}$) отображение E на себя такое, что $(u(y) \mid u(x)) = (x \mid y)$ или, иначе, $(u(x) \mid u(y)) = \overline{(x \mid y)}$; такое отображение называется также *полуавтоморфизмом* предгильбертова пространства E.

Пусть E — предгильбертово пространство и M — его векторное подпространство. Сужение скалярного произведения $(x\,|\,y)$ на $M\times M$ есть положительная эрмитова форма на M и тем самым определяет в M структуру предгильбертова пространства; говорят, что эта структура *индуцирована* структурой предгильбертова пространства, имеющейся в E.

Определение 4. *Гильбертовым пространством (или пространством Гильберта) называют полное отделимое предгильбертово пространство.*

Каждое отделимое предгильбертово пространство изоморфно всюду плотному подпространству гильбертова пространства, определенного с точностью до изоморфизма единственным образом. А именно:

Предложение 4. *Пусть E — отделимое предгильбертово пространство и $\hat{E}$ — пополнение его как нормированного пространства* (Общ. топ., Рез., § 10, п° 28; гл. IX, § 3, предложение 8). *Скалярное произведение $(x\,|\,y)$ продолжается по непрерывности до невырожденной положительной эрмитовой формы на $\hat{E}\times\hat{E}$, определяющей в $\hat{E}$ структуру гильбертова пространства.*

Существование продолжения $(x\,|\,y)$ на $\hat{E}\times\hat{E}$ вытекает из непрерывности этой полуторалинейной формы на $E\times E$ (Общ. топ., Рез., § 10, п° 15; гл. III, § 5, теорема 1). Кроме того, в силу принципа продолжения тождеств, это продолжение, также обозначаемое нами через $(x\,|\,y)$, есть эрмитова полуторалинейная форма, удовлетворяющая соотношению $(x\,|\,x)=\|x\|^2$, где $\|x\|$ — норма на $\hat{E}$, полученная путем продолжения по непрерывности нормы из E; это показывает, что и в $\hat{E}$ из $(x\,|\,x)=0$ следует $x=0$, так что $(x\,|\,y)$ — невырожденная положительная форма и, следовательно, определяет в $\hat{E}$ структуру векторного пространства.

Это гильбертово пространство называется *пополнением* отделимого предгильбертова пространства E.

4. Выпуклые множества в предгильбертовом пространстве.

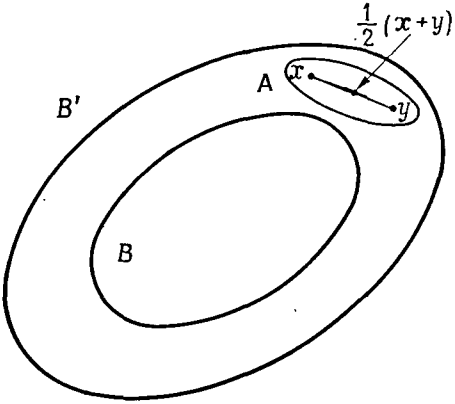
Вычисляя $\|x-y\|^2=(x-y\,|\,x-y)$ и $\|x+y\|^2=(x+y\,|\,x+y)$ для произвольных двух точек x, y предгильбертова пространства E,

сразу приходим к „медианному тождеству"

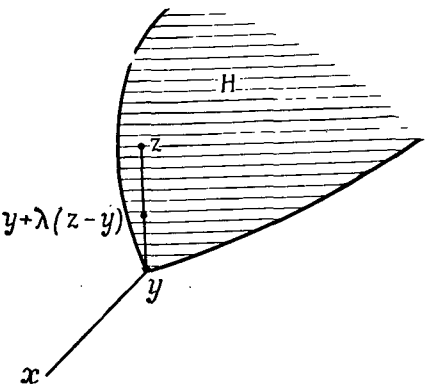
$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}(x-y)\right\|^2=\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{11}$$

Из этого тождества вытекает следующее предложение:

Предложение 5. *Пусть* $d>0$, $0\leqslant\delta<d$, B *и* B' *— множества в* E, *определяемые соответственно неравенствами* $\|x\|\leqslant d$ *и* $\|x\|\leqslant d+\delta$, *и* A *— выпуклое множество, содержащееся в* $B'\cap \complement B$.



Черт. 1.



Черт. 2.

Тогда для любой пары точек x, y *из* A *выполняется неравенство* $\|x-y\|\leqslant\sqrt{12d\delta}$ (черт. 1).

Действительно, $\frac{1}{2}(x+y)\in A$, откуда $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|>d$; тогда из тождества (11) вытекает, что

$$\left\|\frac{1}{2}(x-y)\right\|^2=\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2\leqslant(d+\delta)^2-d^2\leqslant 3d\delta,$$

чем предложение и доказано.

Теорема 1. *Пусть* E *— предгильбертово пространство и* H *— его непустое выпуклое подмножество, являющееся в* E *полным отделимым равномерным подпространством. Для каждого* $x\in E$ *существует однозначно определенная точка* $y\in H$ *такая, что* $\|x-y\|=\inf\limits_{z\in H}\|x-z\|$; *это — также единственная точка из* H, *для которой*

$$\Re\,(x-y\,|\,z-y)\leqslant 0 \tag{12}$$

при всех $z\in H$ (черт. 2).

Путем надлежащего переноса можно привести рассмотрение к случаю $x=0$. Пусть тогда $d=\inf\limits_{z\in H}\|z\|\geqslant 0$ и A_n для каждого целого n — (непустое) множество тех точек из H, для которых $\|z\|\leqslant d+\frac{1}{n}$. Так как A_n выпукло, то из предложения 5 сразу следует, что диаметр этого множества стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$; иными словами, убывающая последовательность (A_n) есть *базис фильтра Коши* в H. Так как H отделимо и полно, то этот базис фильтра сходится к некоторой точке $y\in H$, которая, как явствует из ее определения, есть единственная точка в H такая, что $\|y\|=d$.

Пусть теперь z — произвольная точка из H; для каждого λ, заключенного между 0 и 1, точка $y+\lambda(z-y)$ принадлежит H, значит

$$\|y+\lambda(z-y)\|^2\geqslant\|y\|^2$$

или

$$\|y\|^2+2\lambda\Re(y\mid z-y)+\lambda^2\|z-y\|^2\geqslant\|y\|^2,$$

т. е.

$$2\Re(y\mid z-y)\geqslant-\lambda\|y-z\|^2,$$

откуда и следует (12), поскольку $\lambda>0$ можно взять произвольно малым. Обратно, если $y'\in H$ таково, что $\Re(y'\mid z-y')\geqslant 0$ для всех $z\in H$, то $\|z\|^2=\|y'\|^2+2\Re(y'\mid z-y')+\|z-y'\|^2\geqslant\|y'\|^2$, следовательно, $\|y'\|=d$, а в силу предыдущего это показывает, что $y'=y$.

Однозначно определенную точку y множества H, существование которой установлено теоремой 1, мы называем, допуская вольность речи, *проекцией* x на H (см. предложение 8).

Первая часть теоремы 1 справедлива при более общих предположениях относительно пространства E (упражнение 15).

Доказательством теоремы 1 установлено между прочим наличие следующего свойства:

Следствие 1. *Пусть I — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, и $\iota\to y_\iota$ — отображение I в H. Если* $\|x-y_\iota\|$

стремится, по фильтру $\mathfrak{F}$, *к* $\inf\limits_{z\in H}\|x-z\|$, *то* y_ι *стремится, по* $\mathfrak{F}$, *к проекции* y *вектора* x *на* H.

Следствие 2. *Проекция точки* $x\in E$ *на полное отделимое непустое выпуклое подмножество* H *пространства* E *есть непрерывная функция от* x.

Действительно, пусть x, x' — две точки из E и y, y' — их проекции на H. Имеем $\|x'-y'\|\leqslant\|x'-y\|\leqslant\|x-y\|+\|x-x'\|$ и $\|x-y\|\leqslant\|x-y'\|\leqslant\|x-x'\|+\|x'-y'\|\leqslant\|x-y\|+2\|x-x'\|$. Мы видим, таким образом, что когда x' стремится к x, то $\|x-y'\|$ стремится к $\|x-y\|$, и справедливость утверждения вытекает из следствия 1.

Предложение 6. *Пусть* Φ — *убывающее фильтрующееся множество полных отделимых выпуклых подмножеств пространства* E *и* $d(x,\ H)=\inf\limits_{z\in H}\|x-z\|$ *для каждого* $x\in E$ *и каждого* $H\in\Phi$. *Для того чтобы пересечение* M *всех множеств* $H\in\Phi$ *было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* $x_0\in E$ *множество всех чисел* $d(x_0,\ H)$ $(H\in\Phi)$ *было ограниченно. Тогда проекция каждого* $x\in E$ *на* H *стремится по фильтру сечений множества* Φ *к проекции* x *на* M.

Если M не пусто, то это — полное отделимое выпуклое множество (как пересечение замкнутых выпуклых множеств в полном отделимом подпространстве пространства E) и $d(x,\ M)\geqslant d(x,\ H)$ для каждого $H\in\Phi$ и каждого $x\in E$. Обратно, предположим, что $d=\sup\limits_{H\in\Phi}d(x_0,\ H)<+\infty$; как убывающая функция от H, $d(x_0,\ H)$ стремится к d по фильтру сечений множества Φ. Пусть B — множество всех $z\in E$, для которых $\|x_0-z\|\leqslant d$; покажем, что множества $H\cap B$ образуют *базис фильтра Коши*. Действительно, из теоремы 1 следует, что эти множества выпуклы и не пусты; очевидно, они образуют базис фильтра, и для каждого $\varepsilon>0$, по определению, существует $H_0\in\Phi$ такое, что $d(x_0,\ H_0)\geqslant d-\varepsilon$; предложение 5 показывает тогда, что диаметр множеств $H\cap B$, где $H\subset H_0$ и $H\in\Phi$, произвольно мал вместе с ε, чем и доказана справедливость нашего утверждения. Так как $H_0\cap B$ — замкнутое множество в полном отделимом подпространстве H_0, то $H_0\cap B$ отделимо и полно, так что пересечение множеств $H\cap B$ сводится к некоторой точке y_0 такой,

что $\|x_0 - y_0\| = d$. Это показывает, что M не пусто, $y_0 \in M$ и $d(x_0, M) = d$, так что y_0 есть проекция x_0 на M. Но с другой стороны, проекция x_0 на каждое множество $H \in \Phi$ принадлежит $H \cap B$, и предложение полностью доказано.

Предложение 7. *Пусть Ψ — возрастающее фильтрующееся множество непустых полных выпуклых подмножеств полного отделимого выпуклого множества $A \subset E$ и N — замкнутая выпуклая оболочка их объединения. Тогда проекция точки $x \in E$ на H стремится по фильтру сечений множества Ψ к проекции x на N.*

Заметим прежде всего, что вследствие наших предположений N есть замыкание объединения множеств $H \in \Psi$ и содержится в A, а потому отделимо и полно. Тем самым, в обозначениях предложения 6, имеем $d(x, N) = \inf_{H \in \Psi} d(x, H)$, и, следовательно, $d(x, N)$ есть предел $d(x, H)$ по фильтру сечений множества Ψ. Пусть y_H — проекция x на H; так как $\|x - y_H\| = d(x, H)$ стремится к $d(x, N)$ и $y_H \in N$, то следствие 1 теоремы 1 показывает, что y_H стремится по фильтру сечений множества Ψ к проекции x на N.

5. Векторные подпространства и проекторы

Говорят, что вектор x в предгильбертовом пространстве E *ортогонален* к подмножеству A этого пространства, если он ортогонален к каждому вектору из A; подмножества A и B пространства E называют *ортогональными*, если каждый вектор из A ортогонален к каждому вектору из B. Заметим, что в этом случае, если E предположено, кроме того, отделимым, $A \cap B$ пусто или сводится к вектору 0, поскольку 0 есть тогда единственный вектор из E, ортогональный к самому себе.

Если x и y — ортогональные векторы, то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{13}$$

(„теорема Пифагора“).

В том случае, когда выпуклое множество H есть *векторное подпространство* пространства E, теорема 1 допускает следующее уточнение:

Предложение 8. *Пусть L — полное отделимое векторное подпространство предгильбертова пространства E; проекция*

произвольной точки $x \in E$ на L есть однозначно определенная точка $y \in L$ такая, что $y - x$ ортогонально к L.

Действительно, точка $y + \lambda(z - y)$ для каждого $z \in L$ и каждого скаляра $\lambda \in K$ принадлежит L, так что, в силу теоремы 1, $\Re(\bar{\lambda}(x-y|z-y)) \leqslant 0$; взяв $\lambda = (x-y|z-y)$, получим $|(x-y|z-y)|^2 \leqslant 0$ и, значит, $(x - y \mid z - y) = 0$. Единственность сразу следует из второй части теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть E — предгильбертово пространство и M — его полное отделимое векторное подпространство. Отображение P, относящее каждому вектору $x \in E$ его проекцию на M, есть непрерывный проектор пространства E на себя такой, что $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in E$. Подпространство $M = P(E)$ есть множество тех $x \in E$, для которых $P(x) = x$; ядро $N = \overset{-1}{P}(0)$ есть замкнутое векторное подпространство в E, дополнительное к M, совпадающее с множеством всех векторов, ортогональных к M, а E есть топологическая прямая сумма M и N.*

Действительно, согласно предложению 8, $P(x)$ характеризуется тем, что оно является единственной точкой в M, удовлетворяющей условию

$$(P(x) \mid z) = (x \mid z) \tag{14}$$

для всех $z \in M$. Отсюда сразу следует, что P линейно, что M есть множество тех $x \in E$, для которых $P(x) = x$, и что ядром P служит множество всех векторов, ортогональных к M. Так как $P(x) \in M$, то $P(x) - x$ ортогонально к $P(x)$; согласно теореме Пифагора, тогда $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2$, откуда $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$, чем доказано, что P — непрерывный проектор. Наконец, то, что E есть топологическая прямая сумма M и $N = \overset{-1}{P}(0)$, известно (гл. I, § 1, предложение 12).

Мы называем P *ортогональным проектором* (или, допуская вольность речи, просто *проектором*) E на M; подпространство $N = \overset{-1}{P}(0)$, образованное всеми векторами, ортогональными к M, называется *ортогональным дополнением* к M (или иногда просто *ортогональным* к M, если это не может повлечь путаницы): это

действительно единственное из подпространств, дополнительных к M, которое ортогонально к M. Ортогональным дополнением к N служит M.

Как известно (гл. I, § 1, п° 8), канонический изоморфизм ψ *факторпространства* E/M на N есть изоморфизм структуры топологического векторного пространства в E/M на такую же структуру в N. Если для каждой пары точек $\dot{x}$, $\dot{y}$ из E/M положить $(\dot{x} \mid \dot{y}) = (\psi(\dot{x}) \mid \psi(\dot{y}))$, то этим, очевидно, определится в E/M структура предгильбертова пространства, получающаяся путем перенесения структуры предгильбертова пространства, имеющейся в N, посредством изоморфизма, обратного к ψ. Кроме того, из соотношения $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2$ видно, что полунорма элемента $\dot{x}$ в этой структуре, определяемая соотношением $\|\dot{x}\| = \|\psi(\dot{x})\|$, равна полунорме $\inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$, общим образом определяемой на каждом факторпространстве (гл. II, § 5, п° 5).

6. Сопряженное к гильбертову пространству

Теорема 3. *Пусть E — гильбертово пространство и u_x для каждого $x \in E$ — непрерывная линейная форма $y \to (y \mid x)$. Отображение $x \to u_x$ является взаимно однозначным полулинейным* (относительно автоморфизма $\xi \to \overline{\xi}$) *отображением пространства E на его сопряженное E' и изометрией нормированного пространства E на нормированное пространство E'.*

Действительно, полулинейность отображения $x \to u_x$ следует из (2), а, в силу неравенства Коши — Буняковского, $\|u_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |(y \mid x)| = \|x\|$, так что $x \to u_x$ есть изометрия E в E' и, в частности, взаимно однозначно. Для завершения доказательства остается показать, что для каждого $x' \neq 0$ из E' существует $x \in E$ такое, что $x' = u_x$. Но гиперплоскость $H = x'^{-1}(0)$ замкнута в E; ее ортогональным дополнением (п° 5) служит некоторая прямая D, и если $b \in D$, $b \neq 0$, то линейная форма $y \to (y \mid b)$ аннулируется на H; поэтому существует скаляр $\lambda \neq 0$ такой, что $\langle y, x' \rangle = (y \mid \lambda b)$ для всех $y \in E$, а это означает, что $x' = u_{\lambda b}$.

Отображение $x \to u_x$ и его обратное называются *каноническими* отображениями E на E' и E' на E; если E — вещественное гильбертово пространство, то это — линейные отображения. Если E — комплексное гильбертово пространство, то $x \to u_x$ можно рассматривать как взаимно однозначное линейное отображение пространства E_1,

дуального к E (п° 3), на E'. Часто E (соотв. E_1) отождествляют с E' посредством отображения $x \to u_x$.

Безразлично, сказать ли, что вектор $x \in E$ ортогонален к вектору $y \in E$, или что линейная форма $u_x \in E'$ ортогональна к y в смысле, определенном в гл. IV, § 1, п° 4 (что и оправдывает употребление слова „ортогонально" в обоих случаях). Если M — замкнутое векторное подпространство пространства E, то подпространство M° в E', ортогональное к M (гл. IV, § 1, п° 4), есть образ ортогонального дополнения к M в E, определенного в п° 5, при отображении $x \to u_x$.

Следствие. *Для того чтобы семейство (x_ι) точек гильбертова пространства E было тотальным, необходимо и достаточно, чтобы из справедливости равенств $(x_\iota \mid y) = 0$ для всех индексов ι следовало, что $y = 0$.*

Действительно, это выражает, что 0 есть единственный вектор в E', ортогональный ко всем x_ι (гл. IV, § 1, следствие 1 предложения 1, и § 2, замечание после следствия 2 предложения 4).

Из теоремы 3 вытекает, что каноническое отображение пространства E в его второе сопряженное E'' (гл. IV, § 3, п° 3) отображает E *на* E'', иными словами (гл. IV, § 5, п° 2), что E — *рефлексивное* банаховское пространство. Действительно, если E — вещественное (соотв. комплексное) гильбертово пространство, то каноническое отображение φ пространства E' на E есть изоморфизм нормированного пространства E' на E (соотв. на пространство E_1, дуальное к E); применяя к E (соотв. к E_1) теорему 3, мы видим, что каждая непрерывная линейная форма на нормированном пространстве E' имеет вид $x' \to (x \mid \varphi(x')) = \langle x, x' \rangle$, где x — некоторый фиксированный элемент из E, чем справедливость нашего утверждения и установлена.

Следовательно (гл. IV, § 5, предложение 6):

Теорема 4. *Единичный шар $\|x\| \leqslant 1$ гильбертова пространства E слабо компактен.*

Предложение 9. *Если фильтр $\mathfrak{F}$ в гильбертовом пространстве E слабо сходится к x_0 и, кроме того, $\lim_{\mathfrak{F}} \|x\| = \|x_0\|$, то $\mathfrak{F}$ сходится к x_0 в исходной топологии пространства E.*

Действительно, $\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-2\Re(x\,|\,x_0)+\|x_0\|^2$. Так как, по предположению, $(x\,|\,x_0)$ стремится по фильтру $\mathfrak{F}$ к $\|x_0\|^2$, а $\|x\|$ стремится по $\mathfrak{F}$ к $\|x_0\|$, то $\|x-x_0\|$ стремится по $\mathfrak{F}$ к 0, и предложение доказано.

Замечание. Как известно (гл. IV, § 5, n° 1), сопряженное E' к отделимому предгильбертову пространству E отождествимо с сопряженным к гильбертову пространству $\hat{E}$, служащему пополнением для E. Из теоремы 3 следует, что каждая непрерывная линейная форма на E однозначно записывается в виде $x\to(x\,|\,a)$, где $a\in\hat{E}$.

Упражнения. 1) Пусть E — комплексное нормированное пространство и $f(x,y)$ — симметричная билинейная форма на его базисном вещественном векторном пространстве E_0 такая, что $f(x,x)=\|x\|^2$ для каждого $x\in E$. Показать, что на E существует однозначно определенная эрмитова полуторалинейная форма $g(x,y)$ такая, что $f(x,y)=\Re g(x,y)$. [Используя формулу (5), доказать, что $f(x,iy)=-f(ix,y)$.]

2) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство. Предположим, что для любого его векторного подпространства P размерности 2 (над $\mathbf{R}$) существует определенная на $P\times P$ симметричная билинейная форма $f_P(x,y)$ такая, что $f_P(x,x)=\|x\|^2$ для каждого $x\in P$. Показать, что на $E\times E$ существует эрмитова полуторалинейная форма g такая, что какова бы ни была вещественная плоскость $P\subset E$, $f_P(x,y)=\Re g(x,y)$ для всех $x\in P$ и $y\in P$. [Если E — вещественное векторное пространство, то заметить, что $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ для каждой пары точек x, y из E, и вывести отсюда тождество

$$\|x+y+z\|^2-\|x+y\|^2-\|y+z\|^2-\|z+x\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2=0;$$

если E — комплексное векторное пространство, применить упражнение 1.]

*3) Пусть E — вещественная плоскость (двумерное векторное пространство над $\mathbf{R}$). Пусть B_f для каждой невырожденной положительной симметричной билинейной формы $f(x,y)$ — ограниченное выпуклое тело, определяемое неравенством $f(x,x)\leqslant 1$. *Площадью* B_f относительно базиса (a_1,a_2) в E называется число $s(f)=\pi\,|\,\Delta\,|^{-\frac{1}{2}}$, где Δ — дискриминант f относительно этого базиса. Если (b_1,b_2) — другой базис в E и $a_1\wedge a_2=\delta b_1\wedge b_2$ *), то площадью B_f относительно (b_1,b_2) будет $|\,\delta\,|\,s(f)$.

*) $a_1\wedge a_2$ — бивектор, определяемый векторами a_1, a_2. — *Прим. перев.*

а) Показать, что если f и g — невырожденные положительные формы, для которых $B_f \subset B_g$ (что равносильно неравенству $g \leqslant f$), то $s(f) \leqslant s(g)$. [Рассмотреть базис в E, ортогональный одновременно и относительно f и относительно g.]

б) Пусть A — симметричное ограниченное выпуклое тело в E. Показать, что среди невырожденных положительных форм f на E таких, что $A \subset B_f$, существует, и притом только одна, для которой площадь B_f (относительно заданного базиса в E) принимает наименьшее возможное значение. [При доказательстве единственности f принять во внимание, что если $A \subset B_f$ и $A \subset B_g$, то также $A \subset B_{\frac{1}{2}(f+g)}$.]

в) Пусть A — симметричное ограниченное выпуклое тело в E и f — невырожденная положительная форма такая, что $A \subset B_f$ и B_f обладает наименьшей возможной площадью относительно заданного базиса в E. Показать, что в A содержатся по крайней мере две не симметричные друг другу точки x и y, для которых $f(x, x) = f(y, y) = 1$. [Отнеся форму f к ортонормальному базису (a_1, a_2), рассмотреть для каждого $\varepsilon > 0$ форму $g_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{1+\varepsilon}\xi_1\eta_1 + (1+\varepsilon)\xi_2\eta_2$ и принять во внимание, что, в силу б), $A \not\subset B_{g_\varepsilon}$; показать, что множество тех $x_\varepsilon \in A$, которые не принадлежат B_{g_ε}, обладает точкой прикосновения b, отличной от a_1 и $-a_1$ и такой, что $f(b, b) = 1$.]

г) Доказать аналоги утверждений б) и в) для невырожденных положительных форм f таких, что $B_f \subset A$ и B_f имеет наибольшую возможную площадь (относительно заданного базиса в E).

*4) а) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство размерности $\geqslant 2$, обладающее следующим свойством: если $\|x\| = \|y\|$, то $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leqslant 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Показать, что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x) = \|x\|^2$. [С помощью упражнений 1 и 2 свести к случаю, когда E вещественно и двумерно. Пусть, в этом случае, A — выпуклое тело, определяемое неравенством $\|x\| \leqslant 1$, f — невырожденная положительная форма такая, что $A \subset B_f$ и B_f обладает относительно заданного базиса наименьшей возможной площадью, далее, (e_1, e_2) — ортонормальный относительно f базис и x, y — не симметричные друг другу точки из A, для которых $f(x, x) = f(y, y) = 1$ (упражнение 3в). Показать, что точки пересечения окружности $f(z, z) = 1$ с биссектрисами пары векторов x, y также принадлежат A, и заключить путем повторного применения этого рассуждения, что $A = B_f$.]

б) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство размерности $\geqslant 2$, обладающее следующим свойством: из $\|x+y\| = \|x-y\|$ следует $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Показать, что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x) = \|x\|^2$. [Свести к а).]

в) Доказать аналог предложения а) при предположении, что из $\|x\|=\|y\|$ следует $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\geqslant 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. [Использовать упражнение 3г.]

5) Пусть E — вещественное или комплексное векторное пространство размерности $\geqslant 2$. Предположим, что задано его отображение $x\to\|x\|$ в $\mathbf{R}_+$ такое, что $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ для каждого скаляра λ, $\|x\|=0$ влечет $x=0$ и для любых a, b, c, d из E имеет место „птолемеево неравенство"

$$\|a-c\|\,\|b-d\|\leqslant\|a-b\|\,\|c-d\|+\|b-c\|\,\|a-d\|.$$

а) Показать, что $\|x\|$ есть норма на E. [Заменить в птолемеевом неравенстве d на 0 и b на $-a$.]

б) Показать, что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x)=\|x\|^2$. [Вывести из птолемеева неравенства неравенство $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\geqslant 4\|x\|\,\|y\|$ и использовать упражнение 4в.] Обратное предложение. [Показать, что если в гильбертовом пространстве $a'=\dfrac{a}{\|a\|^2}$, $b'=\dfrac{b}{\|b\|^2}$, то $\|a'-b'\|=\dfrac{\|a-b\|}{\|a\|\,\|b\|}$.]

*6) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство размерности $\geqslant 2$, обладающее следующим свойством: существует вещественное число γ, отличное от 0 и ± 1, такое, что из $\|x+y\|=\|x-y\|$ следует $\|x+\gamma y\|=\|x-\gamma y\|$.

а) Показать, что если $\|x+y\|=\|x-y\|$, то выпуклая функция $\varphi(\xi)=\|x+\xi y\|$ вещественного переменного ξ не постоянна ни на каком интервале. [Рассуждая от противного, рассмотреть наибольший интервал $[\alpha, \beta]$, на котором $\varphi(\xi)$ постоянна. Приняв во внимание, что из $\|u+v\|=\|u-v\|$ следует $\|u+\gamma^n v\|=\|u-\gamma^n v\|$ для каждого целого рационального n, показать, что $\varphi(\delta)=\varphi(\beta)$ для некоторого $\delta>\beta$, достаточно близкого к β.]

б) Показать, что если $\|x+y\|=\|x-y\|$, то $\|x+\xi y\|=\|x-\xi y\|$ для *всякого* вещественного числа ξ. [Основываясь на том, что, в обозначениях из а), $\varphi(\gamma^n)=\varphi(-\gamma^n)$ для каждого целого рационального n, показать, что $\varphi(\xi)$ достигает в точке $\xi=0$ относительного минимума; вывести отсюда, что $\varphi(\xi)=\varphi(-\xi)$ тождественно, заметив, что в противном случае мы имели бы $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)$ для двух чисел λ и μ таких, что $\lambda+\mu\neq 0$, и в этом случае φ достигало бы относительного минимума в точке $\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$.]

в) Вывести из б), что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x)=\|x\|^2$. [Показать прежде всего, что если $\|x\|=\|y\|$, то $\|\alpha x+\beta y\|=\|\beta x+\alpha y\|$ для каждой пары вещественных чисел α, β и что если $\|x+y\|=\|x-y\|$, то $\|\alpha x+\beta y\|=\|\alpha x-\beta y\|$, каковы бы ни были вещественные числа α, β.

Используя эти результаты, показать, далее, что если $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x+y\| = \|x-y\|$, то $\|(\alpha^2-\beta^2)x + 2\alpha\beta y\| = \alpha^2+\beta^2$, и вывести отсюда справедливость доказываемого утверждения *).]

7) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство, обладающее следующим свойством: если x, y, x', y' — четыре вектора из E такие, что $\|x\| = \|x'\|$, $\|y\| = \|y'\|$ и $\|x+y\| = \|x'+y'\|$, то $\|x-y\| = \|x'-y'\|$. Показать, что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x) = \|x\|^2$. [Использовать упражнение 6.]

*8) Пусть E — вещественное нормированное пространство размерности $\geqslant 3$. Предположим, что существует убывающее взаимно однозначное отображение ω множества $\mathfrak{M}$ всех его замкнутых векторных подпространств на себя такое, что $\omega(\omega(M)) = M$ и $M \cap \omega(M) = \{0\}$ для каждого $M \in \mathfrak{M}$.

а) Показать, что существует такое, определенное с точностью до скалярного множителя линейное отображение u пространства E на его сопряженное E', что $u(M) = (\omega(M))^\circ$ для каждого $M \in \mathfrak{M}$. [Рассматривая случай одномерного M, применить основную теорему проективной геометрии (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III, упражнение 10 ([31])), приняв во внимание, что тело $\mathbf{R}$ обладает единственным — тождественным — автоморфизмом (Общ. топ., гл. IV, § 3, упражнение 3).]

б) Положив $(x \mid y) = \langle x, u(y)\rangle$, показать, что $(x \mid x) \neq 0$ для каждого $x \neq 0$ и что соотношения $(x \mid y) = 0$ и $(y \mid x) = 0$ равносильны. Вывести отсюда, что $(y \mid x) = (x \mid y)$ для всех пар точек x, y из E. [Рассмотреть $\lambda \in \mathbf{R}$, для которого $(\lambda x + y \mid x) = 0$.]

в) Показать, что $(x \mid x)$ сохраняет постоянный знак для всех $x \neq 0$, так что, заменяя, если нужно, u на $-u$, можно считать, что $(x \mid y)$ есть невырожденная положительная симметричная билинейная форма на $E \times E$.

г) Пусть $\mathfrak{T}_0$ — исходная топология пространства E. Показать, что топология $\mathfrak{T}$ в E, определяемая нормой $\sqrt{(x \mid x)}$, мажорирует топологию $\mathfrak{T}_0$. [Принять во внимание, что сопряженное к E при $\mathfrak{T}$ содержит сопряженное E' к E при $\mathfrak{T}_0$.]

д) Показать, что u непрерывно при топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(E', E)$. Вывести отсюда, что если E *полно* в исходной топологии $\mathfrak{T}_0$, то u непрерывно при $\mathfrak{T}_0$ и сильной топологии в E'. [Принять во внимание, что u преобразует каждое множество, ограниченное в топологии $\sigma(E, E')$, в множество, ограниченное в топологии $\sigma(E', E)$.] Вывести отсюда, что тогда топологии $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}_0$ совпадают и $\omega(M)$ есть ортогональное дополнение к M при структуре гильбертова пространства, определяемой в E формой $(x \mid y)$. [См. гл. I, § 3, теорема 1.]

е) Показать, что в пространстве $L^1(\mathbf{N})$, снабженном нормой, индуцированной из $\mathscr{B}(\mathbf{N}) = L^\infty(\mathbf{N})$, существует взаимно однозначное ото-

*) Этот (неопубликованный) метод сообщили нам E. Lorch и J. von Neumann.

бражение $M \to \omega(M)$ множества $\mathfrak{M}$ на себя, обладающее указаннымн выше свойствамн. [См. гл. IV, § 5, упражнение 3.]

*9) Пусть E — *бесконечномерное* комплексное нормированное пространство. Предположнм, что существует взаимно однозначное отображение ω множества $\mathfrak{M}$ всех его замкнутых векторных подпространств на себя, обладающее свойствами, указаннымн в упражненин 8.

а) Показать, что существует такое определенное с точностью до скалярного множителя полулинейное (относнтельно автоморфизма $\xi \to \overline{\xi}$ тела C) отображение u пространства E на его сопряженное E', что $u(M) = (\omega(M))^\circ$ для всех $M \in \mathfrak{M}$. [Рассуждать как в упражнении 8; используя упражнение 20 § 5 гл. IV, показать, что u есть полулннейное отображенне относнтельно тождественного автоморфизма тела C нли автоморфизма $\xi \to \overline{\xi}$; наконец, приняв во внимание, что $\langle x, u(x)\rangle \neq 0$ при $x \neq 0$, установить, что первый случай не может иметь места.]

б) Положнв $(x \mid y) = \langle x, u(y)\rangle$, показать, что $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$ и $(x \mid x)$ сохраняет постоянный знак для всех $x \neq 0$. [Тот же метод, что и в упражнении 8.]

в) Показать, наконец, что топологня $\mathfrak{T}$ в E, определяемая нормой $\sqrt{(x \mid x)}$, мажорирует исходную топологию $\mathfrak{T}_0$ и что эти две топологнн совпадают, если E в топологии $\mathfrak{T}_0$ полно; в этом последнем случае $\omega(M)$ есть ортогональное дополнение к M в гильбертовом пространстве E.

*10) Пусть E — конечномерное вещественное векторное пространство, φ — взанмно однозначное линейное отображение пространства E на его сопряженное E^* н A — ограниченное симметричное выпуклое тело в E, для каждой точки x границы которого гиперплоскость, определяемая уравненнем $\langle y - x, \varphi(x)\rangle = 0$, является опорной к A.

а) Пусть $f(x) = |\langle x, \varphi(x)\rangle|$ и a — точка, в которой $f(x)$ достнгает своего мннимума на границе тела A. Показать, что для каждой точкн b такой, что $\langle b, \varphi(a)\rangle = 0$, также $\langle a, \varphi(b)\rangle = 0$. [Принять во внимание, что $\langle x, \varphi(x)\rangle \neq 0$ при $x \neq 0$ н, следовательно, можно предполагать, что $f(x) = \langle x, \varphi(x)\rangle \geqslant 0$; использовать далее то, что каждая опорная гиперплоскость к A в точке a есть также опорная гиперплоскость к множеству, определяемому неравенством $f(x) \leqslant f(a)$.]

б) Показать, что $\langle x, \varphi(y)\rangle$ — симметричная бнлннейная форма н A совпадает с множеством тех точек x, для которых $f(x) \leqslant \gamma$, где γ — надлежащая постоянная. [Провести доказательство индукцией по размерностн пространства E, рассматрнвая, в обозначеннях из а), гиперплоскость, определяемую уравненнем $\langle x, \varphi(a)\rangle = 0$.]

*11) Пусть E — конечномерное комплексное векторное пространство, φ — взанмно однозначное полулинейное (относнтельно автоморфизма $\xi \to \overline{\xi}$) отображенне пространства E на его сопряженное E^* и $\|x\|$ — норма на E такая, что $|\langle x, \varphi(x)\rangle| = \|x\|\,\|\varphi(x)\|$ для всех $x \in E$. Показать, что $\langle x, \varphi(y)\rangle$ с точностью до постоянного множителя—

невырожденная положительная эрмитова форма и $\langle x, \varphi(x)\rangle = \gamma \|x\|^2$ (где γ — постоянная). [Рассуждать как в упражнении 10.]

*12) Пусть E — вещественное нормированное пространство размерности $\geqslant 3$ такое, что для каждой его однородной плоскости P существует непрерывный проектор E на P с нормой 1. Показать, что на E существует невырожденная положительная симметричная форма $f(x, y)$, для которой $\|x\|^2 = f(x, x)$. С помощью упражнения 2 свести к случаю, когда E трехмерно, и установить последовательно справедливость следующих предложений:

а) Для каждой однородной плоскости P в E существует однозначно определенный непрерывный проектор E на P с нормой 1, и ядром этого отображения служит однородная прямая $D(P)$ такая, что $P \to D(P)$ есть непрерывное взаимно однозначное отображение пространства однородных плоскостей из E на пространство однородных прямых (Общ. топ., гл. VI, § 3, n° 5).

б) Каждая точка сферы S пространства E, определяемой уравнением $\|x\| = 1$, есть экстремальная точка шара B, определяемого неравенством $\|x\| \leqslant 1$. [Показать прежде всего, что если бы точка $x \in S$ не была экстремальной, то ее грань F_x в B (гл. II, § 4, упражнение 4) была бы двумерной, рассматривая для этого все однородные плоскости P, проходящие через x. Доказать далее, что это предположение противоречиво, применяя то же рассуждение к точке на F_x, через которую в плоскости грани F_x проходит лишь одна опорная прямая к F_x; существование такой точки может быть установлено с помощью упражнения 15 § 4 гл. II и упражнения 2 § 1 гл. IV.]

в) Каждая точка сферы S' сопряженного пространства E', определяемой уравнением $\|x'\| = 1$, экстремальна в шаре B', определяемом неравенством $\|x'\| \leqslant 1$. [Заметить прежде всего, что для каждой однородной прямой D' из E' существует однозначно определенная однородная плоскость $P'(D')$ в E' такая, что опорная плоскость к B' в каждой точке множества $S' \cap P'(D')$ (единственная, согласно а)) параллельна к D'; при этом $P'(D')$ непрерывно зависит от D'. Вывести отсюда прежде всего, что если бы точка $x' \in S'$ не была экстремальной в B', то ее грань $F_{x'}$ в B' была бы не менее чем двумерна, рассматривая для этого все однородные прямые D', параллельные опорной плоскости к B' в x'. Показать далее, что это предположение ведет к противоречию, рассмотрев точку строгой выпуклости y' множества $F_{x'}$ (гл. II, § 4, упражнение 15) и единственную однородную прямую D'_0, параллельную опорной прямой к $F_{x'}$, проведенной через точку y' в плоскости грани $F_{x'}$, и установив, что функция $D' \to P'(D')$ не была бы непрерывна при $D' = D'_0$.]

г) Показать, что если P_1, P_2, P_3 — тройка однородных плоскостей в E, содержащих одну и ту же прямую Δ, то $D(P_1)$, $D(P_2)$, $D(P_3)$ — тройка прямых, лежащих в одной и той же однородной плоскости $\Pi(\Delta)$.

[Рассмотреть единственную опорную плоскость к B в одной из точек пересечения прямой Δ со сферой S.] Применяя основную теорему проективной геометрии (Алг., гл. II, 2-е изд., Приложение III, упражнение 10([31])), вывести отсюда, что существует взаимно одиозначное линейное отображение φ пространства E' на E, переводящее каждую точку $x' \in E'$ в точку $\varphi(x')$, принадлежащую прямой $D(P)$, где P — плоскость, определяемая уравнением $\langle y, x' \rangle = 0$. Показать, что для любой точки $x' \in S'$ плоскость, определяемая уравнением $\langle \varphi(x'), y' - x' \rangle = 0$, есть опорная плоскость к B', проведенная в этой точке, и в заключение применить упражнение 10.

*13) Пусть E — комплексное нормированное пространство размерности $\geqslant 3$, для всякой однородной (комплексной) плоскости P которого существует непрерывный проектор E на P, имеющий норму 1. Показать, что на E существует невырожденная положительная эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $\|x\|^2 = f(x, x)$. [С помощью упражнения 2 свести к случаю, когда E трехмерно над $\mathbf{C}$, и поступать как в упражнении 12. В пункте б) доказательства рассмотреть для каждого $x' \in E'$ с $\|x'\| = 1$ выпуклое множество $G_{x'}$ тех $x \in S$, для которых $\langle x, x' \rangle = 1$; показать, что если бы $G_{x'}$ не сводилось к одной точке, то оно было бы не менее чем трехмерно над $\mathbf{R}$, и рассмотреть тогда в вещественном линейном многообразии, порожденном множеством $G_{x'}$, граничную точку этого множества, через которую проходит лишь одна его (вещественная) опорная гиперплоскость. В пункте в) доказательства также рассмотреть, для каждой точки $x \in S$, множество G'_x тех $x' \in S'$, для которых $\langle x, x' \rangle = 1$, и показать, что G'_x сводится к точке; для этого доказать, что в противном случае вещественное линейное многообразие, порожденное множеством G'_x, было бы не менее чем двумерно над $\mathbf{R}$ и содержало бы два вектора, линейно независимых над $\mathbf{C}$. В заключение воспользоваться упражнением 11.]

*14) Говорят, что вектор y вещественного нормированного пространства E размерности $\geqslant 3$ *квазинормален* к вектору x, если $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$ для каждого скаляра λ.

а) Показать, что если отношение „y квазинормален к x“ влечет отношение „x квазинормален к y“, то на E существует симметричная билинейная форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x) = \|x\|^2$. [Показать, что выполнено условие упражнения 12.]]

б) Показать, что то же заключение справедливо, если для каждой замкнутой однородной гиперплоскости H пространства E существует ненулевой вектор, квазинормальный ко всем векторам из H. [Тот же метод с применением теоремы Цорна к проекторам с нормой 1 во всевозможных векторных подпространствах, содержащих однородную плоскость P, на эту плоскость, упорядоченным по отношению продолжения.]

в) Показать, что то же заключение справедливо, если в E каждый вектор $x \neq 0$ квазинормален ко всем векторам из некоторой замкнутой

гиперплоскости H. [Свести к случаю, когда E трехмерно, и применить результат упражнения 12 к пространству, сопряженному к E.]

г) Показать, что то же заключение справедливо, если из квазинормальности z к x и y следует квазинормальность z к $x+y$. [Применить упражнение 12.]

*15) Говорят, что (вещественное или комплексное) нормированное пространство E *равномерно выпукло*, если для каждого ε, заключенного между 0 и 2, существует $\delta>0$ такое, что неравенства $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$, $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ влекут $\|x+y\|\leqslant 2-\delta$. Говорят, что E *равномерно гладко*, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ такое, что неравенства $\|x\|\geqslant 1$, $\|y\|\geqslant 1$, $\|x-y\|\leqslant\eta$ влекут $\|x+y\|\geqslant\|x\|+\|y\|-\varepsilon\|x-y\|$.

а) Показать, что для того, чтобы E было равномерно гладким, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ существовало $\rho>0$ такое, чтоб из $\|x\|=1$, $\|y\|\leqslant\rho$ следовало $\|x+y\|+\|x-y\|\leqslant 2+\varepsilon\|y\|$.

б) Показать, что если E равномерно выпукло, то его сопряженное E' равномерно гладко, и что если E равномерно гладко, то его сопряженное E' равномерно выпукло. [Использовать формулы (1) и (4) § 5 гл. IV.]

в) Показать, что если E равномерно выпукло и фильтр $\mathfrak{F}$ в E сходится к x_0 в топологии $\sigma(E, E')$, причем $\lim_{\mathfrak{F}}\|x\|=\|x_0\|$, то $\mathfrak{F}$ сходится к x_0 в исходной топологии пространства E.

г) Показать, что равномерно выпуклое или равномерно гладкое банаховское пространство рефлексивно. [Использовать б) и в), предложение 5 § 5 гл. IV и упражнение 11в § 3 гл. IV. (См. § 2, упражнение 13в).]

д) Обобщить на равномерно выпуклые банаховские пространства первую часть теоремы 1 и ее следствия, а также предложения 6 и 7. [См. гл. IV, § 5, упражнение 1.]

*16) Пусть E — (вещественное или комплексное) нормированное пространство размерности $\geqslant 2$ такое, что для каждого ε, заключенного между 0 и 2, из $\|x\|=1$, $\|y\|=1$, $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ следует $\|x+y\|\leqslant 2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$. Показать, что на E существует эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $\|x\|^2=f(x, x)$. [Свести к случаю, когда E вещественно и двумерно, и рассуждать, как в упражнении 4а.]

*17) а) Пусть E — вещественное или комплексное нормированное пространство размерности $\geqslant 2$. Показать, что для каждого $x\neq 0$ из E и каждого $\alpha>0$ существует $y\in E$ такое, что $\|y\|=\alpha$ и $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

б) Предположим, что для любых двух векторов x и y из E, удовлетворяющих соотношению $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, удовлетворяется также соотношение $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. Показать, что тогда на E существует эрмитова форма $f(x, y)$, для которой $f(x, x)=$

$= \|x\|^2$. [Используя а), свести к упражнению 4: ограничиваясь случаем, когда E двумерно, доказать, что если $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ и $z \in E$ таково, что $\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = 1$, то $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ или $-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.]

в) Предположим, что для каждого вектора $x \neq 0$ из E множество H всех векторов y, для которых $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, устойчиво относительно сложения. Показать, что справедливо заключенне из б). [Свести к случаю, когда E вещественно и двумерно. Используя а) и компактность единичного шара в E, показать, что H есть замкнутое множество, содержащее по крайней мере две различные полупрямые с началом 0; доказать, что это — две противоположные полупрямые, заметив, что в противоположном случае порождаемое ими выпуклое множество содержалось бы в H и содержало x или $-x$.]

18) Пусть E — вещественное гильбертово пространство и $f(x)$ — непрерывная линейная форма на E. Показать, что функция $\|x\|^2 - f(x)$ на каждом замкнутом выпуклом множестве $A \subset E$ ограниченна снизу и достигает своего наименьшего значения в некоторой однозначно определенной точке из A. [Использовать теорему 3.]

19) Пусть E — гильбертово пространство и (x_n) — последовательность точек из E, слабо сходящаяся к точке a. Для каждого $y \in E$ положим $d(y) = \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|$ и $D(y) = \limsup_{n \to \infty} \|x_n - y\|$. Показать, что $(d(y))^2 = (d(a))^2 + \|y-a\|^2$ и $(D(y))^2 = (D(a))^2 + \|y-a\|^2$. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$; дать примеры, где $d(a) = \alpha$ и $D(a) = \beta$.

§ 2. Ортогональные семейства в гильбертовом пространстве

1. *Внешняя гильбертова сумма гильбертовых пространств*

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство гильбертовых пространств над K; $(x_\iota | y_\iota)$ и $\|x_\iota\|$ — скалярное произведение и норма в E_ι. Пусть F — произведение $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ векторных пространств E_ι (не наделенное топологией), G — *прямая сумма* векторных пространств E_ι, т. е. подпространство в F, образованное теми точками $x = (x_\iota)$, у которых $x_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов. Каковы бы ни были точки $x = (x_\iota)$ и $y = (y_\iota)$ из G, сумма $\sum_{\iota \in I} (x_\iota | y_\iota)$ имеет смысл, поскольку лишь конечное число ее членов отлично от нуля; обозначим ее $(x | y)$. Ясно, что $(x, y) \to (x | y)$ есть *эрмитова полуторалинейная форма*

на G. При этом $(x\,|\,x)=\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2\geqslant 0$ для всех $x\in G$ и из $(x\,|\,x)=0$ следует, что $x_\iota=0$ для всех $\iota\in I$, т. е. что $x=0$. Иными словами, $(x\,|\,y)$ есть *невырожденная положительная* эрмитова форма на G и определяет в G структуру *отделимого предгильбертова пространства*. Это пространство вообще не полно. *Внешней гильбертовой суммой* семейства гильбертовых пространств $(E_\iota)_{\iota\in I}$ называется гильбертово пространство $\hat{G}$, получающееся путем *пополнения* отделимого предгильбертова пространства G; мы будем обозначать его $\bigoplus_{\iota\in I}E_\iota$.

Предложение 1. *Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство гильбертовых пространств и E — часть векторного пространства $F=\prod_{\iota\in I}E_\iota$, образованная теми точками $x=(x_\iota)$, для которых $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2<+\infty$. Тогда E есть векторное подпространство в F, семейство $((x_\iota\,|\,y_\iota))$ для каждой пары точек $x=(x_\iota)$, $y=(y_\iota)$ из E суммируемо в K и $(x\,|\,y)=\sum_{\iota\in I}(x_\iota\,|\,y_\iota)$ есть невырожденная положительная эрмитова форма на E, определяющая в E структуру гильбертова пространства, при которой E изоморфно внешней гильбертовой сумме семейства $(E_\iota)_{\iota\in I}$.*

Так как $\|x_\iota+y_\iota\|^2\leqslant 2(\|x_\iota\|^2+\|y_\iota\|^2)$, то E — векторное подпространство в F. Неравенства

$$|(x_\iota\,|\,y_\iota)|\leqslant\|x_\iota\|\,\|y_\iota\|\leqslant\frac{1}{2}(\|x_\iota\|^2+\|y_\iota\|^2)$$

показывают, что семейство $((x_\iota\,|\,y_\iota))_{\iota\in I}$ суммируемо; так как $(x\,|\,x)=\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2$, то $(x\,|\,x)\geqslant 0$ и $(x\,|\,x)=0$ равносильно $x=0$, так что $(x\,|\,y)$ есть невырожденная положительная форма на E. Структура отделимого предгильбертова пространства, определяемая в E формой $(x\,|\,y)$, индуцирует в прямой сумме G векторных пространств E структуру предгильбертова пространства, определенную выше, и ясно, что G *всюду плотно* в предгильбертовом пространстве E. Следовательно, нужно еще только показать, что E *полно* по норме $\|x\|=\sqrt{(x\,|\,x)}$. Пусть (x_n) — последовательность Коши по этой норме и $x_n=(x_{n,\iota})_{\iota\in I}$ $(x_{n,\iota}\in E_\iota)$. По предположению, для каждого $\varepsilon>0$ существует n_0 такое, что $\|x_m-x_n\|^2\leqslant\varepsilon^2$, т. е. $\sum_{\iota\in I}\|x_{m,\iota}-x_{n,\iota}\|^2\leqslant\varepsilon^2$, при всех $m\geqslant n_0$, $n\geqslant n_0$. В частности, $(x_{n,\iota})_{n\in\mathbf{N}}$ при каждом фикси-

рованном $\iota \in I$ есть последовательность Коши и, значит, сходится к некоторой точке $a_\iota \in E_\iota$; устремляя m к $+\infty$, мы видим, что каково бы ни было конечное подмножество J из I, $\sum_{\iota \in J} \|a_\iota - x_{n,\iota}\|^2 \leqslant \varepsilon^2$ для всех $n \geqslant n_0$ и, следовательно, также $\sum_{\iota \in I} \|a_\iota - x_{n,\iota}\|^2 \leqslant \varepsilon^2$ для всех $n \geqslant n_0$. Это показывает, прежде всего, что точка $a - x_n$, где $a = (a_\iota)$, а значит, и точка a принадлежит E, и, далее, что последовательность (x_n) стремится к a в пространстве E; тем самым предложение полностью доказано.

Внешнюю гильбертову сумму $\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ гильбертовых пространств обычно отождествляют с указанным гильбертовым пространством E.

Пусть f_ι — отображение E_ι в E, переводящее $z \in E_\iota$ в элемент $(x_\iota) \in E$, для которого $x_\varkappa = 0$ при $\varkappa \neq \iota$ и $x_\iota = z$; ясно, что f_ι есть изоморфизм гильбертова пространства E_ι на замкнутое векторное подпространство гильбертова пространства E. f_ι называется *каноническим отображением* E_ι в E, и E_ι чаще всего отождествляется с его образом в E при этом изоморфизме. При этом условии E_ι и $E_\varkappa$ *ортогональны* в E при $\iota \neq \varkappa$ и E совпадает с замкнутым векторным подпространством, порожденным объединением всех подпространств E_ι.

Если I конечно, то E есть прямая сумма векторных пространств E_ι; так как канонический проектор E на E_ι непрерывен для каждого $\iota \in I$, то E является тогда также топологической прямой суммой пространств E_ι (гл. I, § 1, предложение 10). При $I = [1, n]$ вместо $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ пишут также $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$.

2. Гильбертова сумма ортогональных подпространств гильбертова пространства

Определение 1. *Гильбертово пространство E называется гильбертовой суммой семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ его замкнутых векторных подпространств, если:*

1° *E_ι и $E_\varkappa$ ортогональны для любых двух различных индексов ι и $\varkappa$;*

2° *замкнутое векторное подпространство, порожденное объединением всех E_ι, совпадает с E.*

Теорема 1. *Пусть E — гильбертово пространство, являющееся гильбертовой суммой семейства $(E_\iota)_{\iota\in I}$ своих замкнутых векторных подпространств. Существует однозначно определенный изоморфизм f пространства E на внешнюю гильбертову сумму E' семейства (E_ι), сужение которого на E_ι есть каноническое отображение f_ι пространства E_ι в E' для каждого $\iota\in I$.*

Пусть $G\subset E'$ прямая сумма векторных пространств E_ι и g — ее линейное отображение $(x_\iota)_{\iota\in I}\to\sum_{\iota\in I}x_\iota$ в E. Покажем, что g есть изоморфизм предгильбертова пространства G на (предгильбертово) подпространство $g(G)$ пространства E, порожденное объединением всех E_ι. Действительно, для любых двух элементов $x=(x_\iota)_{\iota\in I}$ и $y=(y_\iota)_{\iota\in I}$ из G имеем

$$(g(x)\,|\,g(y))=\Big(\sum_{\iota\in I}x_\iota\,\Big|\,\sum_{\iota\in I}y_\iota\Big)=\sum_{(\iota,\varkappa)\in I\times I}(x_\iota\,|\,y_\varkappa).$$

Но, по предположению, $(x_\iota\,|\,y_\varkappa)=0$ при $\iota\neq\varkappa$; следовательно,

$$(g(x)\,|\,g(y))=\sum_{\iota\in I}(x_\iota\,|\,y_\iota)=(x\,|\,y),$$

и наше утверждение доказано. Изоморфизм g продолжается до изоморфизма $\bar{g}$ пополнения E' пространства G на замыкание $g(G)$ в E, которым, по предположению, служит E; ясно, что изоморфизм f, обратный к $\bar{g}$, и обладает требуемым свойством. Его единственность вытекает из того, что замкнутое подпространство пространства E, порожденное объединением всех E_ι, есть само E.

Обычно E отождествляют с внешней гильбертовой суммой E' его подпространств E_ι посредством изоморфизма f и называют E' гильбертовой суммой подпространств E_ι.

Следствие 1. *Пусть E — гильбертово пространство, являющееся гильбертовой суммой семейства $(E_\iota)_{\iota\in I}$ своих замкнутых векторных подпространств, P_ι для каждого $\iota\in I$ — ортогональный проектор* (§ 1, п° 5) *E на E_ι и $x_\iota=P_\iota(x)$ для каждого $x\in E$. Тогда семейство $(\|x_\iota\|^2)$ суммируемо в $\mathbf{R}$, семейство (x_ι) суммируемо в E и*

$$\|x\|^2=\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2,\quad x=\sum_{\iota\in I}x_\iota.$$

Обратно, если $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство элементов из* E *такое, что* $x_\iota\in E_\iota$ *для всех* $\iota\in I$ *и* $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2<+\infty$, *то это семейство суммируемо и его сумма есть единственная точка из* E *такая, что* $P_\iota(x)=x_\iota$ *для всех* $\iota\in I$. *Наконец,*

$$(x\mid y)=\sum_{\iota\in I}(P_\iota(x)\mid P_\iota(y))$$

для каждой пары точек x, y *из* E.

Действительно, эти свойства очевидны для внешней гильбертовой суммы пространств E_ι и переносятся на E по изоморфизму.

Следствие 2. *Пусть* E *— отделимое предгильбертово пространство,* $(E_\iota)_{\iota\in I}$ *— семейство его полных векторных подпространств, в котором* E_ι *и* $E_\varkappa$ *ортогональны для каждой пары различных индексов* ι *и* $\varkappa$, V *— замкнутое векторное подпространство в* E, *порожденное объединением всех* E_ι, P_ι *— ортогональный проектор* E *на* E_ι *и* $x_\iota=P_\iota(x)$. *Тогда:*

1° $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2\leqslant\|x\|^2$.

2° *Следующие условия равносильны:* а) $x\in V$; б) $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2=\|x\|^2$; в) *семейство* (x_ι) *суммируемо в* E *и* $x=\sum_{\iota\in I}x_\iota$.

3° *Если* V *полно, то семейство* (x_ι) *суммируемо в* E *и* $\sum_{\iota\in I}x_\iota=P_V(x)$, $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2=(P_V(x))^2$, *где* P_V *— ортогональный проектор* E *на* V.

Действительно, пусть $\hat{E}$ — гильбертово пространство, получающееся путем пополнения отделимого предгильбертова пространства E, так что E всюду плотно в $\hat{E}$. Будучи полными, E_ι являются замкнутыми подпространствами в $\hat{E}$. Замыкание $\overline{V}$ подпространства V в $\hat{E}$ есть замкнутое векторное подпространство в $\hat{E}$, порожденное объединением всех E_ι, и $V=\overline{V}\cap E$. Пространство $\hat{E}$ есть гильбертова сумма всех E_ι и ортогонального дополнения W к $\overline{V}$ в $\hat{E}$. Пусть x_0 — ортогональная проекция x на W. Согласно следствию 1, $\|x\|^2=\|x_0\|^2+\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2$ и $x=x_0+\sum_{\iota\in I}x_\iota$ в $\hat{E}$. Отсюда сразу следует неравенство 1°, а также то, что условия б) и в) из 2° равносильны условию $x_0=0$, т. е. условию $x\in V$. Наконец, если V полно, то, положив

$x' = P_V(x)$, имеем $x' - x_\iota = (x - x_\iota) - (x - P_V(x))$, так что $x' - x_\iota$ ортогонально к E_ι и, следовательно, $x_\iota = P_\iota(x')$ для всех $\iota \in I$; тогда достаточно применить 2° к вектору x'.

Замечание. Пусть E — отделимое предгильбертово пространство и $(V_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство его векторных подпространств, в котором V_ι и $V_\varkappa$ ортогональны для каждой пары различных индексов ι и $\varkappa$. Тогда пересечение подпространства $V_\varkappa$ с замкнутым векторным подпространством $W_\varkappa$, порожденным объединением всех V_ι с индексами $\iota \neq \varkappa$, для каждого $\varkappa \in I$ сводится к элементу 0. Действительно, вектор x, принадлежащий одновременно $V_\varkappa$ и $W_\varkappa$, ортогонален ко всем V_ι с индексами $\iota \neq \varkappa$, а значит, и к $W_\varkappa$; но тогда он ортогонален, в частности, к самому себе и, значит, равен нулю.

Предложение 2. *Пусть E — гильбертово пространство, $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство его замкнутых векторных подпространств и $(W_{\lambda\mu})_{\mu \in M_\lambda}$ для каждого $\lambda \in L$ — семейство замкнутых векторных подпространств в V_λ такое, что замкнутое векторное подпространство, порожденное объединением этого семейства, совпадает с V_λ. Для того чтобы E было гильбертовой суммой семейства $(W_{\lambda\mu})_{\lambda \in L,\, \mu \in M_\lambda}$, необходимо и достаточно, чтобы E было гильбертовой суммой семейства $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$, а V_λ, для каждого $\lambda \in L$, — гильбертовой суммой семейства $(W_{\lambda\mu})_{\mu \in M_\lambda}$* („ассоциативность гильбертовой суммы").

Чтобы установить необходимость условия, достаточно убедиться в том, что V_α и V_β при $\alpha \neq \beta$ ортогональны. Но каждый элемент из $W_{\alpha\mu}$ ($\mu \in M_\alpha$) ортогонален ко всем $W_{\beta\nu}$ ($\nu \in M_\beta$), а значит, и к порождаемому ими замкнутому векторному подпространству V_β; то же самое рассуждение показывает далее, что каждый элемент из V_β, будучи ортогонален ко всем $W_{\alpha\mu}$ ($\mu \in M_\alpha$), ортогонален к V_α.

Чтобы установить достаточность условия, достаточно убедиться в том, что при его выполнении E совпадает с замкнутым векторным подпространством F, порожденным объединением всех $W_{\lambda\mu}$ ($\lambda \in L$, $\mu \in M_\lambda$). Но F содержит замкнутое векторное подпространство, порожденное объединением всех $W_{\lambda\mu}$ с произвольным фиксированным $\lambda \in L$, т. е. V_λ; поэтому F есть замкнутое векторное подпространство, порожденное объединением всех V_λ, т. е. по предположению совпадает с E.

3. Ортонормальные семейства

Определение 2. *Семейство $(e_\iota)_{\iota\in I}$ векторов предгильбертова пространства E называется ортонормальным, если e_ι и $e_\varkappa$ при $\iota\neq\varkappa$ ортогональны и $\|e_\iota\|=1$ для каждого $\iota\in I$.*

$e_\iota\neq e_\varkappa$ при $\iota\neq\varkappa$, поскольку $(e_\iota\,|\,e_\iota)=1$; *ортонормальным множеством* называется каждое множество $S\subset E$ такое, что семейство, определяемое тождественным отображением S на себя, ортонормально; тем самым безразлично, говорить ли об ортонормальном семействе или ортонормальном множестве.

Если $(e_\iota)_{\iota\in I}$ — ортонормальное семейство, то полные одномерные векторные подпространства $D_\iota=Ke_\iota$ попарно ортогональны. Ортогональная проекция каждого $x\in E$ на D_ι равна $\lambda_\iota e_\iota$ такому, что $(x-\lambda_\iota e_\iota\,|\,e_\iota)=0$, откуда $(x\,|\,e_\iota)=\lambda_\iota(e_\iota\,|\,e_\iota)=\lambda_\iota$. Результаты n° 2 в применении к подпространствам D_ι дают:

Предложение 3. *Каждое ортонормальное семейство в отделимом предгильбертовом пространстве E-топологически свободно.*

Отметим, что это свойство вытекает также из характеризации топологически свободных семейств (гл. IV, § 1, следствие 2 предложения 1 и § 2, замечание после предложения 4), если принять во внимание, что пространство, сопряженное к E, отождествимо с пополнением пространства E или пространства, дуального к E (§ 1, n° 6).

Предложение 4. *Пусть E — отделимое предгильбертово пространство, $(e_\iota)_{\iota\in I}$ — ортонормальное семейство в E и V — порожденное им замкнутое векторное подпространство пространства E. Тогда*:

1° *Для каждого $x\in E$*

$$\sum_{\iota\in I}|(x\,|\,e_\iota)|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{1}$$

(неравенство Бесселя), так что множество тех $\iota\in I$, для которых $(x\,|\,e_\iota)\neq 0$, не более чем счетно. При этом следующие условия равносильны: а) $x\in V$; б) $\|x\|^2=\sum_{\iota\in I}|(x\,|\,e_\iota)|^2$; в) *семейство векторов $(x\,|\,e_\iota)e_\iota$ суммируемо в E и $x=\sum_{\iota\in I}(x\,|\,e_\iota)e_\iota$.*

2° *Если V полно, то семейство векторов $(x \mid e_\iota)\, e_\iota$ суммируемо в E для каждого $x \in E$ и* $\sum_{\iota \in I} (x \mid e_\iota)\, e_\iota = P_V(x)$, $\sum_{\iota \in I} |(x \mid e_\iota)|^2 = \|P_V(x)\|^2$.

3° *Если V полно, то для каждого семейства $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ скаляров, для которого* $\sum_{\iota \in I} |\lambda_\iota|^2 < +\infty$, *существует однозначно определенная точка $x \in V$ такая, что $(x \mid e_\iota) = \lambda_\iota$ для каждого $\iota \in I$. Если $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ — второе семейство скаляров, для которого* $\sum_{\iota \in I} |\mu_\iota|^2 < +\infty$, *и $y \in V$ таково, что $(y \mid e_\iota) = \mu_\iota$ для каждого $\iota \in I$, то* $(x \mid y) = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \bar{\mu}_\iota$.

Предложение 5. *Пусть $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — ортонормальное семейство в отделимом предгильбертовом пространстве E. Следующие свойства равносильны:*

а) *семейство (e_ι) тотально;*

б) *для каждого $x \in E$ семейство векторов $(x \mid e_\iota)\, e_\iota$ суммируемо в E и* $x = \sum_{\iota \in I} (x \mid e_\iota)\, e_\iota$;

в) *для каждого $x \in E$*

$$\|x\|^2 = \sum_{\iota \in I} |(x \mid e_\iota)|^2 \tag{2}$$

(равенство Парсеваля).

Если E — гильбертово, то эти условия равносильны еще следующему:

г) *если $(x \mid e_\iota) = 0$ для всех $\iota \in I$, то $x = 0$.*

Равносильность условий а), б), в) сразу следует из предложения 4. Равносильность условий а) и г), когда E — гильбертово, вытекает из следствия теоремы 3 § 1.

Определение 3. *Ортонормальное тотальное семейство в предгильбертовом пространстве E называется ортонормальным базисом этого пространства.*

Пусть (e_ι) — ортонормальный базис пространства E; числа $(x \mid e_\iota)$, допуская вольность речи, называют *координатами* вектора $x \in E$ относительно базиса (e_ι).

Ортонормальный базис отделимого предгильбертова пространства E является также ортонормальным базисом пополнения этого пространства.

Ортонормальный базис пространства E не есть *базис* E над телом K в смысле, определенном в Алг., гл. II, § 1, п° 6; чтобы избежать путаницы, мы базис предгильбертова пространства E в смысле этого последнего определения всегда называем *алгебраическим базисом* E над K.

4. Ортонормализация

Теорема 2. *Каждое ортонормальное множество L в гильбертовом пространстве E содержится в некотором ортонормальном базисе B этого пространства.*

Действительно, пусть $\mathfrak{D}$ — множество всех ортонормальных подмножеств пространства E, упорядоченное по включению. Ясно, что это — множество конечного характера (Теор. мн., Рез., § 6). Следовательно, в силу теоремы Цорна (Теор. мн., Рез., § 6, п° 10), в $\mathfrak{D}$ существует *максимальное* множество B, содержащее L. Остается показать, что B — тотальное множество. Но в противном случае существовал бы вектор $y \neq 0$, ортогональный ко всем векторам из B (предложение 5), и умножая y на надлежащий скаляр, можно было бы сделать $\|y\| = 1$. А тогда $B \cup \{y\}$ было бы ортонормальным множеством, отличным от B и содержащим B, в противоречие с определением множества B. Тем самым теорема доказана.

Следствие. *В каждом гильбертовом пространстве существует ортонормальный базис.*

Достаточно применить теорему 2 к случаю, когда $L = \varnothing$.

Предложение 6. *Пусть E — отделимое предгильбертово пространство и (a_n) — счетное свободное семейство его векторов. В E существует однозначно определенное ортонормальное семейство (e_n), обладающее следующими свойствами:*

1° *Для каждого целого $p > 0$ векторное подпространство, порожденное векторами $e_1, e_2, \ldots, e_p$, совпадает с векторным подпространством, порожденным векторами $a_1, a_2, \ldots, a_p$.*

2° *$(a_n \mid e_n)$ вещественно и > 0 для каждого номера n.*

Действительно, пусть V_n — подпространство (размерности n), порожденное векторами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{V_n}(a_{n+1})$ (где P_{V_n} — ортогональный проектор на полное векторное подпространство V_n). Kb_{n+1} есть ортогональное дополнение к V_n в V_{n+1}, так

что если векторы e_n удовлетворяют условию 1°, то необходимо $e_{n+1} = \lambda b_{n+1}$; условие $\|e_{n+1}\| = 1$ дает тогда $|\lambda|^2 \|b_{n+1}\|^2 = 1$, а условие $(a_{n+1} \mid e_{n+1}) > 0$ дает $\bar{\lambda}(a_{n+1} \mid b_{n+1}) > 0$; но это вполне определяет λ и, следовательно, доказывает, что ортонормальное семейство (e_n), удовлетворяющее условиям 1° и 2°, допускает определение по индукции, и притом однозначным образом.

Говорят, что семейство (e_n) получено посредством *ортонормализации* свободного семейства (a_n). Очевидно, векторное подпространство, порожденное семейством (e_n), совпадает с векторным подпространством, порожденным семейством (a_n). В частности, если (a_n) — тотальная последовательность, то и (e_n) — тотальная последовательность и, значит, является ортонормальным базисом пространства E; отсюда:

Следствие. *В каждом отделимом предгильбертовом пространстве E счетного типа существует счетный ортонормальный базис.*

Действительно, утверждение, что E — счетного типа, означает, что E содержит тотальную последовательность, а из такой последовательности всегда можно выбрать тотальное свободное семейство (Алг., гл. II, § 3).

Можно дать примеры отделимых предгильбертовых пространств, не обладающих никаким ортонормальным базисом (упражнение 2).

Для каждого множества индексов I обозначим через $L^2_K(I)$ гильбертово пространство, являющееся внешней гильбертовой суммой семейства $(K_\iota)_{\iota \in I}$, где $K_\iota = K$ для каждого $\iota \in I$; иными словами, $L^2_K(I)$ — векторное пространство всех семейств $x = (\xi_\iota)_{\iota \in I}$ элементов из K, имеющих I своим множеством индексов и таких, что $\sum_{\iota \in I} |\xi_\iota|^2 < +\infty$, со скалярным произведением $(x \mid y) = \sum_{\iota \in I} \xi_\iota \bar{\eta}_\iota$. Следствие теоремы 2 показывает, что *каждое гильбертово пространство над K изоморфно некоторому пространству $L^2_K(I)$.*

Предложение 7. *Любые два ортонормальных базиса одного и того же гильбертова пространства E равномощны.*

Пусть B и C — два ортонормальных базиса пространства E. Случай, когда одно из множеств B, C конечно, тривиален, поскольку

конечный ортонормальный базис является и алгебраическим базисом пространства. Предположим поэтому, что B и C бесконечны. Пусть A_x для каждого $x \in B$ — часть C, образованная теми $y \in C$, для которых $(x \mid y) \neq 0$. Множество A_x счетно (предложение 4). Для каждого $y \in C$ существует $x \in B$ такое, что $y \in A_x$, поскольку B — ортонормальный базис, а $y \neq 0$; иными словами, C есть объединение счетных множеств A_x, где x пробегает B. Поэтому мощность множества C не выше мощности произведения $\mathbf{N} \times B$, т. е. мощности множества B (Теор. мн., Рез., § 7); точно так же мощность множества B не выше мощности множества C, и предложение доказано.

Кардинальное число произвольного ортонормального базиса гильбертова пространства E называется *гильбертовой размерностью* этого пространства.

Следствие 1. *Для каждых двух ортонормальных базисов гильбертова пространства E существует автоморфизм этого пространства, преобразующий первый базис во второй.*

Следствие 2. *Для того чтобы гильбертовы пространства $L^2_K(I)$ и $L^2_K(J)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы I и J были равномощны.*

Упражнения. *1) Пусть B — ортонормальный базис в бесконечномерном гильбертовом пространстве E.

а) Показать, что каждое всюду плотное в E множество имеет мощность, не меньшую мощности B, и что в E существует всюду плотное множество, равномощное с B.

б) Показать, что мощность E равна мощности $B^{\mathbf{N}}$. [Для установления того, что мощность E не превосходит мощности $B^{\mathbf{N}}$, использовать а).]

в) Показать, что если мощность B не превосходит мощности континуума, то каждый алгебраический базис пространства E имеет мощность континуума. [Использовать упражнение 15 § 3 гл. II.] Напротив, если мощность B больше мощности континуума, то каждый алгебраический базис пространства E равномощен с $B^{\mathbf{N}}$. [Использовать б) и упражнение 14 из Алг., гл II, § 1 (²).]

*2) а) Пусть E_1 и E_2 — гильбертовы пространства, имеющие своими гильбертовыми размерностями соответственно бесконечные кардинальные числа $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ такие, что $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$; далее, $E = E_1 \oplus E_2$ — гильбертова сумма пространств E_1 и E_2 и $(b_\lambda)_{\lambda \in L}$ — ортонормальный базис

пространства E_2. В E_1 содержится алгебраически свободная система $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ (см. упражнение 1в); пусть H — векторное подпространство в E, порождаемое (алгебраически) семейством $(a_\lambda + b_\lambda)_{\lambda\in L}$. Показать, что $\bar{H}$ имеет гильбертову размерность $\mathfrak{n}$. [Принять во внимание, что ортогональная проекция H на E_2 всюду плотна, и использовать упражнение 1а.] Пусть S — ортонормальное множество в H; показать, что $S\cap E_2\neq\varnothing$, и вывести отсюда, что кардинальное число множества S не превосходит $\mathfrak{m}$. [Показать, что каждый элемент ортонормального базиса пространства E_1 ортогонален ко всем элементам из S, за исключением, самое большее, их счетного бесконечного множества.]

б) Пусть E_3 — гильбертово пространство гильбертовой размерности $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{n}$, F — гильбертова сумма $E\oplus E_3$ и G — подпространство $H+E_3$ в F. Показать, что $\bar{G}$ имеет гильбертову размерность $\mathfrak{p}$. Пусть T — ортонормальное множество в G; показать, что $T\cap(E_2\oplus E_3)\subset E_3$; вывести отсюда [рассуждая, как в а)], что кардинальное число ортогональной проекции T на E_2 не превосходит $\mathfrak{m}$, и заключить, что G не обладает ортонормальным базисом, заметив, что ортогональная проекция G на E_2 всюду плотна в E_2.

3) Показать, что в каждом неполном отделимом предгильбертовом пространстве E существует замкнутая гиперплоскость такая, что ортогональное к ней подпространство пространства E сводится к одному элементу 0. Вывести отсюда, что если E — счетного типа, то в E существует не тотальное ортонормальное семейство, не содержащееся ни в каком ортонормальном базисе.

4) Пусть E — отделимое предгильбертово пространство и $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство его полных векторных подпространств, вполне упорядоченное по включению и такое, что объединение всех E_ι всюду плотно в E. Показать, что существует ортонормальный базис $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ пространства E, обладающий следующим свойством; для каждого $\iota\in I$ множество всех e_α, принадлежащих E_ι, есть ортонормальный базис пространства E_ι. [Рассмотреть множество всех ортонормальных подмножеств S пространства E таких, что для каждого $\iota\in I$ все векторы из S, не принадлежащие E_ι, ортогональны к E_ι, и взять максимальный элемент этого множества.] Получить отсюда новое доказательство предложения 6.

5) *Определителем Грама* произвольных n точек x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ отделимого предгильбертова пространства E называется определитель $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det((x_i \mid x_j))$.

а) Показать, что $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant 0$ и что для того, чтобы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образовывали свободную систему, необходимо и достаточно, чтобы $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\neq 0$. [Выбрать в подпространстве, порожденном векторами x_i, ортонормальный базис и использовать формулу (9) из Алг., гл. III, § 8 ([32]).]

б) Показать, что расстояние точки $x\in E$ от векторного подпространства V, порожденного n точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующими

свободное семейство, равно $\sqrt{\dfrac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}}$. [Искать выражение для проекции x на V.]

в) Пусть (x_n) — бесконечная последовательность точек из E. Для того чтобы семейство (x_n) было топологически свободным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_n \frac{G(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)} < +\infty$$

для каждого $p > 0$. [Использовать б).]

6) Показать, что для любого гильбертова пространства E бесконечной гильбертовой размерности существует изоморфизм E на его замкнутое векторное подпространство, отличное от E.

7) Пусть E — гильбертово пространство, обладающее бесконечным счетным ортонормальным базисом $(e_n)_{n \geqslant 1}$, и A — замкнутая выпуклая оболочка множества, образованного точками $\left(1 - \frac{1}{n}\right)e_n$ $(n \geqslant 1)$. Показать, что в A нет ни одной пары точек x, y, расстояние между которыми было бы равно диаметру этого множества и A. [См. гл. IV, § 5, упражнение 1.]

8) Пусть E — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство. Показать, что в E имеется бесконечное множество структур комплексного гильбертова пространства, для которых E служит базисным вещественным локально выпуклым пространством (гл. II, § 6, n° 1). [Для доказательства существования автоморфизмов u структуры топологического векторного пространства в E таких, что $u^2(x) = -x$ воспользоваться ортонормальным базисом пространства E; затем применить упражнение 1 § 1.] Дать пример, показывающий, что это предложение не распространяется на неполные отделимые предгильбертовы пространства. [Рассмотреть в E всюду плотную гиперплоскость.]

9) Пусть E и F — бесконечномерные гильбертовы пространства счетного типа, (a_n) — ортонормальный базис пространства E и (b_n) — ортонормальный базис пространства F.

а) Пусть u — непрерывное линейное отображение E в F; положим $u(a_n) = \sum_m \alpha_{mn} b_m$. Показать, что $\sum_n |\alpha_{mn}|^2 \leqslant \|u\|^2$ и $\sum_m |\alpha_{mn}|^2 \leqslant \|u\|^2$ для всех m и n.

б) Дать пример двойной последовательности (α_{mn}) такой, что $\sum_m |\alpha_{mn}|^2 \leqslant 1$ для всех n и $\sum_n |\alpha_{mn}|^2 \leqslant 1$ для всех m, но не существует никакого непрерывного линейного отображения пространства E в F, для которого бы $(u(a_n) \mid b_m) = \alpha_{mn}$ для всех пар целых чисел (m, n). [Обозначив через V_p и W_p подпространства в E и F, соответственно порожденные векторами a_n или b_n с номерами $n \leqslant p$, показать, что для каждого p существует линейное отображение пространства V_p

на W_p такое, что $(u_p(a_n) \mid b_m) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ $(m \leqslant p,\ n \leqslant p)$ и $\|u_p\| \geqslant \sqrt{p}$.]

*10) Пусть E — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство и $\mathscr{B} = L(E)$ — банаховская алгебра всех его непрерывных эндоморфизмов (с нормой $\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$).

а) Для каждой пары векторов x, y из E отображение $A \to (Ax \mid y)$ есть непрерывная линейная форма $f_{x,y}$ на банаховском пространстве $\mathscr{B}$. Показать, что существует взаимно однозначное линейное отображение ψ тензорного произведения $E \otimes E$ (рассматриваемого как не топологическое векторное пространство) на векторное подпространство пространства $\mathscr{B}'$, сопряженного к банаховскому пространству $\mathscr{B}$, такое, что $\psi(x \otimes y) = f_{x,y}$ для каждой пары $(x, y) \in E \times E$. Следовательно $E \otimes E$ можно отождествить с этим подпространством пространства $\mathscr{B}'$ так, чтобы $\langle A, x \otimes y \rangle = (Ax \mid y)$, и наделить $E \otimes E$ структурой нормированного пространства, индуцированной из $\mathscr{B}'$. Показать, что при этой структуре $\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|$. [Рассмотреть эндоморфизм $z \to (z \mid x)y$ пространства E.] Показать, что для каждого конечного ортонормального семейства $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ имеет место равенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (c_i \otimes c_i) \right\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

[Тот же метод.]

б) Показать, что пространство, сопряженное к нормированному пространству $E \otimes E$, отождествимо с $\mathscr{B}$; точнее, каждая непрерывная линейная форма на $E \otimes E$ однозначно представима в виде $z \to \langle A, z \rangle$, где $A \in \mathscr{B}$. [Принять во внимание, что $(x, y) \to \varphi(x \otimes y)$, где φ — непрерывная линейная форма на $E \otimes E$, есть билинейная непрерывная форма на $E \times E$, и вывести отсюда существование $A \in \mathscr{B}$ такого, что $\varphi(x \otimes y) = (Ax \mid y)$.]

в) Вывести из б), что нормированное пространство $E \otimes E$ бочечно. [Используя бочечность пространства E, показать, что каждое множество из $\mathscr{B}$, ограниченное в топологии $\sigma(\mathscr{B}, E \otimes E)$, сильно ограниченно.]

г) Пусть $U_{x,y}$, для каждой пары векторов x, y из E, — непрерывный эндоморфизм $z \to (z \mid x)y$ пространства E. Показать, что существует одиозначно определенное линейное отображение $t \to U_t$ пространства $E \otimes E$ в $\mathscr{B}$ такое, что $U_{x \otimes y} = U_{x,y}$ для каждой пары векторов x, y из E. Показать, далее, что $\langle U_{x \otimes y}, t \rangle = \langle U_t y \mid x \rangle$ для каждой пары векторов x, y из E, и вывести отсюда, что $\|U_t\| \leqslant \|t\|$. Доказать, наконец, что U_t при $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ есть эндоморфизм конечного ранга $\leqslant n$.

д) Пусть F_n для каждого целого n — множество тех элементов $t \in E \otimes E$, для которых U_t есть эндоморфизм ранга $\leqslant n$. Показать,

что F_n нигде не плотно в $E \otimes E$. [Для доказательства того, что дополнение к F_n в $E \otimes E$ содержит всюду плотное открытое множество, использовать неравенство $\|U_t\| \leqslant \|t\|$ и то, что для каждого непрерывного эндоморфизма u конечного ранга m банаховского пространства G существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждый непрерывный эндоморфизм v конечного ранга, удовлетворяющий условию $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$, имеет ранг $\geqslant m$.] Вывести отсюда, что $E \otimes E$ есть не бэровское нормированное бочечное пространство.

11) а) Пусть E — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство счетного типа, (a_n) — свободное семейство его точек такое, что каждое из семейств (a_{2n}) и (a_{2n+1}) тотально в E (гл. II, § 3, упражнение 16), и F, G — векторные подпространства пространства E, имеющие своими (алгебраическими) базисами соответственно (a_{2n}) и (a_{2n+1}). Пространства F и G приводятся в двойственность билинейной формой $(y \mid z)$. Показать, что выпуклое множество $F \cap B$, где B — шар $\|x\| \leqslant 1$ пространства E, замкнуто в пространстве F, наделенном топологией $\sigma(F, G)$, но не обладает ни одной замкнутой опорной гиперплоскостью.

б) Пусть (b_n) — всюду плотная последовательность в B и $u(x)$ для каждого $x \in E$ — последовательность $\left(\frac{(b_k \mid x)}{k}\right)_{k \geqslant 1}$. Показать, что u есть непрерывное взаимно однозначное линейное отображение пространства E на некоторое подпространство H гильбертова пространства $L^2_k(\mathbf{N})$, причем $u(B)$ компактно. Показать, что в нормированном подпространстве $L = u(F)$ множество $u(B \cap F)$ выпукло, замкнуто и предкомпактно, но не обладает ни одной опорной гиперплоскостью, [Принять во внимание, что если f — непрерывная линейная форма на L, то $f \circ u$ есть линейная форма на F, непрерывная в топологии $\sigma(F, G)$.]

*12) а) Пусть $a^{(n)}$ для каждого целого $n > 0$ — двойная последовательность, определенная в упражнении 21 § 5 гл. IV, и E — векторное пространство всех таких двойных последовательностей $x = (x_{ij})$ вещественных чисел, что $p_n(x) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^{(n)} \mid x_{ij} \mid^2} < +\infty$ для каждого целого $n > 0$. Показать, что p_n — полунормы на E и E, наделенное топологией, определяемой этими полунормами, есть монтелевское пространство Фреше. [Рассуждать, как в упражнении 27 § 3 гл. IV.]

б) Показать, что сопряженное к E может быть отождествлено с пространством E' всех таких последовательностей $x' = (x'_{ij})$, что $\sum_{i,j} \left(a_{ij}^{(n)}\right)^{-1} \mid x'_{ij} \mid^2 < +\infty$ хотя бы для одного номера n.

в) Показать, что $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mid x_{ij} \mid \right)^2 < +\infty$ для каждого $x = (x_{ij}) \in E$. [Использовать неравенство Коши — Буняковского.] Для каждого $j \geqslant 1$

положим $y_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}$, так что последовательность $u(x) = (y_j)$ будет принадлежать гильбертову пространству $L^2(\mathbf{N})$. Показать, что u есть гомоморфизм E на $L^2(\mathbf{N})$, и вывести отсюда, что в $L^2(\mathbf{N})$ существуют слабо компактные множества, не являющиеся образами никакого компактного в топологии $\sigma(E, E')$ множества из E при отображении u. [Рассуждать, как в упражнении 21 § 5 гл. IV.]

*13) а) Пусть (E_n) — последовательность вещественных банаховских пространств и E — векторное подпространство произведения $F = \prod_{n=0}^{\infty} E_n$, образованное теми последовательностями $x = (x_n)$, для которых $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$. Показать, что функция $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2}$ на E есть норма и E полно в этой норме. E называется *гильбертовой суммой* банаховских пространств E_n.

б) Показать, что пространство E', сопряженное к банаховскому пространству E, отождествимо с гильбертовой суммой сопряженных пространств E'_n, причем $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle$ для каждого $x' = (x'_n) \in E'$. [Показать, что если u — непрерывная линейная форма на E, u_n — ее сужение на E_n, рассматриваемом как подпространство в E, и a_n — точка из E_n, для которой $\|a_n\| = 1$, то ряд с общим членом $\lambda_n u_n(a_n)$ сходится для каждой последовательности (λ_n) вещественных чисел такой, что $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$, и вывести отсюда, что $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n(a_n))^2 < +\infty$, используя, например, теорему Банаха — Штейнгауза для $L^2(\mathbf{N})$.]

в) Вывести из б), что если все E_n рефлексивны, то E рефлексивно. В частности, принимая за E_n пространство $\mathbf{R}^n$, снабженное нормой $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|$, где $x = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, показать, что E рефлексивно, но ни для одной нормы на пространстве E, согласующейся с его топологией, $\hat{E}$ не является равномерно выпуклым (§ 1, упражнение 15).

*14) Пусть E — гильбертово пространство счетного типа, $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — ортонормальный базис в E, множеством индексов которого служит множество всех целых рациональных чисел. Обозначим через u изометрию E на себя такую, что $u(e_n) = e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$, и положим $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)\, e_0 + u(x)$.

а) Пусть B — шар $\|x\| \leqslant 1$ и S — сфера $\|x\| = 1$. Показать, что сужение f на B есть гомеоморфизм B на себя [заметив, что сужение u на S есть гомеоморфизм S на себя] и что не существует точки $x_0 \in B$, для которой бы $f(x_0) = x_0$ [выразить x_0 через ее координаты относительно базиса (e_n)].

б) Пусть $g(x)$ для каждого $x \in B$ — точка, в которой полупрямая с началом $f(x)$, проходящая через x, пересекает S. Показать, что g есть непрерывное отображение B а S такое, что $g(x) = x$ для всех $x \in S$. [См. Общ. топ., гл. VI, § 2, упражнение 8 ([33]).] Вывести отсюда, что существует непрерывное отображение h произведения $S \times [0, 1]$ на S такое, что $h(x, 0) = x_0$ и $h(x, 1) = x$ для каждого $x \in S$.

15) Пусть E — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство счетного типа и $(e_n)_{n \geqslant 1}$ — его ортонормальный базис.

а) Пусть A — замкнутая симметричная выпуклая оболочка множества всех точек $\frac{e_n}{n}$. Показать, что A компактно и не обладает в точке 0 ни одной замкнутой опорной гиперплоскостью, но существуют прямые D, проходящие через 0 и такие, что $D \cap A = \{0\}$.

б) Пусть F — гильбертова сумма $E \oplus \mathbf{R}$, e_0 — вектор, образующий вместе с векторами e_n $(n \geqslant 1)$ ортонормальный базис пространства F, и B — замкнутая выпуклая оболочка множества $\{e_0\} \cup A$. Показать, что в F существует замкнутый отрезок L с началом 0 такой, что $L \cap B = \{0\}$, но нет никакой замкнутой гиперплоскости, проходящей через 0 и отделяющей L и B (хотя в точке 0 и существует замкнутая опорная гиперплоскость к B).

*16) Пусть E_1 и E_2 — бесконечномерные вещественные гильбертовы пространства счетного типа и E — гильбертова сумма $E_1 \oplus E_2$ (отождествленная с произведением $E_1 \times E_2$). Пусть $(e_n)_{n \geqslant 1}$ — ортонормальный базис пространства E_1, далее, A — компактное выпуклое множество в E_2, содержащее 0, и D — прямая в E_2, проходящая через 0, такие, что $D \cap A = \{0\}$ и A не обладает замкнутой опорной гиперплоскостью в точке 0 (упражнение 15). Пусть (α_n) и (β_n) — последовательности вещественных чисел $\geqslant 0$ такие, что $\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$ и $\sum_n \frac{1}{\alpha_n} < 1$. Пусть P — множество всех точек $\sum_n \xi_n e_n$ из E_1 таких, что $0 \leqslant \xi_n \leqslant \alpha_n$ для всех $n \geqslant 1$. Наконец, пусть Q — замкнутая выпуклая оболочка в E множества всех точек $(\alpha_n e_n, x + \beta_n a)$, где $n \geqslant 1$, $a \neq 0$ — фиксированная точка прямой D и x пробегает A.

а) Показать, что $P \cap Q = \varnothing$, но в E не существует замкнутой гиперплоскости, которая бы отделяла P и Q.

б) Пусть F — гильбертова сумма $E \oplus \mathbf{R}$ и c — произвольная точка из F, не содержащаяся в E. Показать, что заостренные выпуклые конусы P_1 и Q_1 с вершиной c, порожденные соответственно множествами P и Q, замкнуты в F, но никакая замкнутая гиперплоскость в F не отделяет P_1 и Q_1. [Для установления замкнутости P_1 и Q_1 доказать, что ни P, ни Q не содержит полупрямой.] *)

*) Упражнения 11б, 15 и 16 сообщил нам V. L. Klee.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВАМ I—V

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Общая теория топологических векторных пространств возникла в течение промежутка времени, длившегося приблизительно от 1920 до 1930 г. Но она подготовлялась задолго до этого исследованием многочисленных проблем функционального анализа; и нельзя излагать ее историю, не указав, по крайней мере в общих чертах, как исследование этих проблем постепенно подводило математиков (особенно с наступлением двадцатого века) к осознанию родственности рассматриваемых вопросов и возможности формулировать их значительно более общим образом и применить к ним единообразные способы решения.

Можно сказать, что аналогии между алгеброй и анализом и идея рассмотрения функциональных уравнений (т. е. уравнений, в которых неизвестной является функция) как „предельных случаев" алгебраических уравнений восходят к первым шагам исчисления бесконечно малых, которое в некотором смысле отвечает этой потребности обобщения „с конечного на бесконечное". Но прямым алгебраическим прародителем исчисления бесконечно малых является исчисление конечных разностей (см. Функц. вещ. перем., Исторический очерк к главам I—III, стр. 161—166), а не решение общих линейных систем; и лишь в середине восемнадцатого века обнаружились первые аналогии между этим последним и проблемами дифференциального исчисления, в связи с уравнением колеблющейся струны. Мы не будем подробно входить здесь в историю этого вопроса; но следует отметить появление двух фундаментальных идей, постоянно встречающихся и в дальнейшем и обязанных обе своим возникновением Д. Бернулли. Первая состоит в рассмотрении колебания струны как „предельного случая" колебания системы n точечных масс, когда n неограниченно возрастает; как известно, эта задача, в случае конечного n, доставила несколько позже первый пример исследования собственных значений линейного преобразования (см. Исторический очерк к главам VI—VII Алгебры); этим числам соответствуют, при указанном „переходе к пределу", частоты „собственных колебаний" струны, экспериментально наблюдавшихся очень давно, теоретически же обоснованных (а именно Тейлором) в начале восемнадцатого века. Эта формальная аналогия, хотя и довольно редко отмечавшаяся в дальнейшем ([Iб], стр. 390), по-видимому, никогда в течение девятнадцатого века не терялась из виду; но, как мы дальше увидим, вся ее важность была осознана лишь к 1890—1900 годам.

Другой идеей Д. Бернулли (быть может, подсказаиной экспериментальными фактами) является „принцип суперпозиции", согласно которому самое общее колебание струны должно быть „разложимо" в суперпозицию „собственных колебаний", что, говоря математически, означает, что общее решение уравнения колебаний струны должно быть разложимо в ряд $\sum_n c_n \varphi_n(x, t)$, где $\varphi_n(x, t)$ представляют собственные колебания. Как известно, этот принцип вызвал длительный спор насчет возможности разложения „произвольной функции" в тригонометрический ряд — спор, который был разрешен лишь работами Фурье и Дирихле в первой трети девятнадцатого века. Но еще до достижения этого результата встретились другие примеры разложений в ряды по „ортогональным" функциям *): сферическим функциям и полиномам Лежандра, а также различным системам вида $\left(e^{i\lambda_n x}\right)$, где λ_n уже не кратны одному и тому же числу, вводившимся с восемнадцатого века в задачах о колебаниях, а также Фурье и Пуассоном в ходе их исследований по теории теплоты. К 1830 году все явления, наблюденные в этих различных частных случаях, были систематизированы Штурмом (I) и Лиувиллем (II) в общей теории колебаний для функций одной переменной: они рассмотрели дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\rho(x)\, y = 0 \qquad (p(x) > 0,\ \rho(x) > 0) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y'(a) - h_1 y(a) &= 0 \\ y'(b) + h_2 y(b) &= 0 \end{aligned} \qquad (h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0,\ a < b) \tag{2}$$

и доказали следующие фундаментальные результаты:

1) задача имеет ненулевое решение лишь когда λ принимает одно из значений, образующих некоторую последовательность (λ_n) чисел > 0, стремящуюся к $+\infty$;

2) для каждого λ_n решения кратны одной и той же функции v_n, которую можно предполагать „нормированной" условием $\int_a^b \rho v_n^2\, dx = 1$, причем

$$\int_a^b \rho v_m v_n\, dx = 0 \quad \text{при } m \neq n;$$

3) каждая дважды дифференцируемая функция f на интервале $[a, b]$, удовлетворяющая граничным условиям (2), разложима в равномерно сходящийся ряд $f(x) = \sum_n c_n v_n(x)$, где $c_n = \int_a^b \rho f v_n\, dx$;

4) имеет место равенство $\int_a^b \rho f^2\, dx = \sum_n c_n^2$ (уже доказанное Парсевалем

*) Впрочем, этот термин не появлялся до работ Гильберта.

в 1799 году — впрочем, чисто формально — для систем тригонометрических функций и имеющее своим непосредственным следствием „неравенство Бесселя", высказанное последним (все еще для тригонометрических рядов) в 1828 году).

Полустолетием позже эти свойства были пополнены работами Грама (III), который, продолжая исследования Чебышева, выявил связь между разложениями в ряды ортогональных функций и задачей „наилучшего квадратического приближения" (восходящего непосредственно к гауссовскому „методу наименьших квадратов" в теории ошибок); в этой последней задаче требуется найти для функции f линейную комбинацию $\sum_i a_i\psi_i$ заданной конечной последовательности функций $(\psi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ так, чтобы интеграл $\int_a^b \rho\left(f-\sum_i a_i\psi_i\right)^2 dx$ достигал своего минимума. Эту по существу тривиальную проблему линейной алгебры Грам решил оригинальным способом, применив к функциям ψ_i процесс „ортонормализации", описанный в § 2 гл. V (и обычно приписываемый Эрхарду Шмидту). Переходя, далее, к случаю бесконечной ортонормальной системы (φ_n), он поставил вопрос, как узнать, когда „наилучшее квадратическое приближение" μ_n функции f линейными комбинациями первых n функций этой системы стремится к нулю при неограниченном возрастании n *); таким образом он подошел к определению понятия полной ортонормальной системы и знал, что это свойство равносильно несуществованию ненулевой функции, ортогональной ко всем φ_n. Он пытался даже подвергнуть исследованию понятие „сходимости в среднем квадратическом", но до введения основных понятий теории меры мог получить в этом направлении лишь результаты весьма частного характера.

Во второй половине девятнадцатого века основные усилия аналитиков были направлены больше в сторону распространения теории Штурма — Лиувилля на функции нескольких переменных, чего особенно требовало исследование уравнений в частных производных эллиптического типа математической физики и естественно связанных с ними краевых задач. Главный интерес сосредоточился на уравнении „колеблющейся мембраны"

$$L_\lambda(u)\equiv\Delta u+\lambda u=0, \tag{3}$$

для которого разыскивались в достаточно правильной области G решения, обращающиеся в нуль на контуре области; и лишь весьма постепенно были преодолены значительные аналитические трудности, заключенные в этой задаче, к которой нельзя было и думать применить методы, оказавшиеся успешными для функций одной переменной. Напомним основные этапы на

*) Следует отметить, что в своем исследовании Грам нигде не ограничивает себя рассмотрением непрерывных функций, подчеркивая зато важность условия $\int_a^b \rho f^2 dx<+\infty$

пути к решению: введение „функции Гриа" области G, существование которой было доказано Шварцем; также принадлежащее Шварцу доказательство существования наименьшего собственного значения; наконец, в 1894 году А. Пуанкаре в его знаменитом мемуаре (Va) удалось доказать существование и важнейшие свойства всех собственных значений, рассмотрев, при заданной „правой части" f, решение u_λ уравнения $L_\lambda(u) = f$, обращающееся в нуль на контуре области, и показав, путем искусного обобщения метода Шварца, что u_λ есть мероморфная функцня комплексного переменного λ, обладающая лишь простыми вещественными полюсами λ_n, как раз и являющимися искомыми собственными значениями.

Эти исследования тесно связаны с первыми шагами теории линейных интегральных уравнений, несомненно наиболее способствовавшей воцарению новых идей. Мы ограничимся здесь лишь самым кратким очерком развития этой теории (отсылая за бо́льшими подробностями к Историческим очеркам, которые будут сопровождать главы этого трактата, посвященные спектральной теории). Этот тип функциональных уравнений, сначала лишь спорадически появлявшийся в первой половине девятнадцатого века (Абель, Лиувилль), приобрел важность после того, как Беер и К. Нейманн свели решение „задачи Дирихле" для достаточно правильной области G к решению „интегрального уравнения второго рода"

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x) \tag{4}$$

относительно неизвестной функции u, — уравнения, которое К. Нейманну удалось решить способом „последовательных приближений" в 1877 году. Побуждаемый, несомненно, уже упомянутыми алгебраическими аналогиями не в меньшей мере, чем результатами, полученными им для уравнения колеблющейся мембраны, А. Пуанкаре приходит в 1896 году (Vб) к идее введения переменного параметра λ перед знаком интеграла в предыдущем уравнении и утверждает, что, как и для уравнения колеблющейся мембраны, решение будет тогда мероморфной функцией от λ; но ему не удалось доказать этот результат, установленный (для непрерывного „ядра" K и конечного интервала $[a, b]$) лишь четырьмя годами позже И. Фредгольмом (VI). Этот последний, быть может, еще более сознательно, чем его предшественники, полностью руководствуется аналогией между уравнением (4) и линейной системой

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\delta_{pq} + \frac{1}{n} a_{pq}\right) x_q = b_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant n) \tag{5}$$

и получает решение уравнения (4) в виде отношения двух выражений, составленных по образцу определителей, входящих в формулы Крамера. Впрочем, здесь не заключалось новой идеи: с начала девятнадцатого века метод „неопределенных коэффициентов" (состоявший в нахождении неизвестной функции, предполагаемой разложимой в ряд $\sum_n c_n \varphi_n$ по известным функциям φ_n,

путем вычисления коэффициентов c_n) привел к „линейным системам с бесконечным числом неизвестных"

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Фурье, встретившийся с такой системой, „решил" ее еще как математик восемнадцатого века: он отбросил все члены с номером i или j, превосходящим n, нашел явное решение получившейся конечной системы по формулам Крамера и далее „перешел к пределу", устремив в решении n к бесконечности! Хотя позже уже не удовлетворялись подобными фокусами, все же вначале пытались атаковать эту задачу еще с помощью теории определителей; начиная с 1886 года (вслед за работой Хилла) А. Пуанкаре, а затем Х. фон Кох построили теорию „определителей бесконечного порядка", позволившую решить некоторые типы систем (6) по классическому образцу; и если эти результаты и не оказались непосредственно применимыми к задаче, поставленной Фредгольмом, несомненно, по крайней мере, что, в частности, теория Коха послужила ему моделью для образования его „определителей".

В этот момент и выступил Гильберт, дав новый толчок развитию теории (VII). Он начал с дополнения работ Фредгольма фактическим осуществлением предельного перехода, ведущего от решения системы (5) к решению уравнения (4); но он тут же присоединил к этому соответствующий предельный переход для теории вещественных квадратичных форм, к которому естественно приводили типы интегральных уравнений с симметрическим ядром (т. е. таким, что $K(y, x) = K(x, y)$), гораздо более часто встречающиеся в математической физике. Это привело его к фундаментальной формуле, непосредственно обобщающей приведение квадратичной формы к ее осям:

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b \varphi_n(s)\, x(s)\, ds \right)^2, \tag{7}$$

где λ_n — (необходимо вещественные) собственные значения ядра K, φ_n образуют ортонормальную систему соответствующих собственных функций, а ряд в правой части сходится при $\int_a^b x^2(s)\, ds \leqslant 1$. Он показал также, что каждая функция, „представимая" в виде $f(x) = \int_a^b K(x, y)\, g(y)\, dy$, „обладает „разложением" $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_a^b \varphi_n(y) f(y)\, dy$, и, следуя аналогии с классической теорией квадратичных форм, указал вариационный метод определения собственных значений λ_n, представляющий собой не что иное, как распространение хорошо известных экстремальных свойств осей поверхности второго порядка ((VII), стр. 1—38).

Эти первые результаты Гильберта были почти сразу передоказаны Э. Шмидтом в более простой и общей форме, избегающей как введения „определителей Фредгольма", так и перехода от конечного к бесконечному, и уже весьма близкой к абстрактному изложению, поскольку в доказательствах очевидным образом использовались лишь фундаментальные свойства линейности и положительности интеграла (VIIIa). Но тем временем Гильберт поднялся до еще более общих концепций. Все предшествующие работы выявили важность функций с интегрируемым квадратом, а формула Парсеваля устаиовила тесную связь между этими функциями и последовательностями (c_n), для которых $\sum_n c_n^2 < +\infty$. Несомнеино, этой идеей руководствовался Гильберт в своих мемуарах 1906 года ((VII), гл. XI—XIII), где, оживив старый метод „неопределенных коэффициентов", он показал, что решение интегрального уравнения (4) равносильно решению бесконечной системы линейных уравнений

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = b_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

для „коэффициентов Фурье" $x_p = \int_a^b u(t)\,\omega_p(t)\,dt$ неизвестной функции u относительно заданной полной ортонормальной системы (ω_n) (с $b_p = \int_a^b f(t)\,\omega_p(t)\,dt$ и $k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,\ t)\,\omega_p(s)\,\omega_q(t)\,ds\,dt$). При этом единственные решения системы (8), которые с этой точки зрения подлежат рассмотрению, это те, для которых $\sum_n x_n^2 < +\infty$; и потому именно этим типом решения систематически ограничивается Гильберт; но зато он расширяет условия, накладываемые на „бесконечную матрицу" (k_{pq}) (которая в системе (8) такова, что $\sum_{p,\,q} k_{pq}^2 < +\infty$). С этого момента становится ясным, что в основе всей теории лежит, хотя и не введенное явно, „пространство Гильберта" последовательностей (x_n) вещественных чисел, для которых $\sum_n x_n^2 < +\infty$, появляющееся как результат „предельного перехода" от евклидова пространства конечной размерности. Более того, что особенно важно для дальнейшего развития теории, Гильберт пришел к введению в этом пространстве не одного лишь, а двух различных понятий сходимости (соответствующих тому, что впоследствии было названо слабой и сильной топологиями*), а также „принципа выбора", являющегося не чем иным, как

*) Вариационное исчисление уже естественно привело к рассмотрению в одном и том же множестве функций различных понятий сходимости (в зависимости от того, требуется ли равномерная сходимость одних только функций или же фуикций с некоторым числом их производных); но способы сходимости, определенные Гильбертом, были в то время совершенно новы.

свойством слабой компактности единичиого шара. Новая линейная алгебра, развитая им в связи с решением систем (8), полностью основывалась на этих топологических понятиях: линейные отображения, линейные формы и билинейные формы (ассоциированные с линейными отображениями) классифицировались и изучались соответственно их свойствам „непрерывности“ *). В частности, Гильберт открыл, что успех метода Фредгольма основывался на понятии „вполне непрерывности“, которое он выделил, сформулировав для билинейных форм **), и подверг глубокому изучению; за дальнейшими подробностями мы отсылаем к той части настоящего трактата, где будут изложены это важное понятие, а также великолепные и глубокие работы Гильберта, в которых он положил начало спектральной теории симметричных билинейных форм (как ограниченных, так и неограниченных).

Язык Гильберта остается еще классическим, и на всем протяжении своих „Grundzüge“ Гильберт не упускает из виду приложений теории, излагаемых на большом числе примеров (занимающих около половины книги). Следующее поколение предпочло уже стать на гораздо более абстрактную точку зрения. Под влиянием идей Фреше и Ф. Рисса, относящихся к общей топологии (см. Исторический очерк к гл. I Общ. топ.), Э. Шмидт (VIIIб) и сам Фреше смело ввели, в 1907—1908 годах, язык евклидовой геометрии в (вещественное или комплексиое) „пространство Гильберта“; именно в этих работах содержатся первое упоминание нормы (с современным обозначением $\|x\|$), неравенство треугольника, которому она удовлетворяет, тот факт, что пространство Гильберта „сепарабельно“ и полно; кроме того, Э. Шмидт доказывает существование ортогональной проекции на замкнутое линейное многообразие, что позволяет ему придать гильбертовой теории линейных систем более простой и общий вид. В том же 1907 году Фреше и Ф. Рисс заметили, что пространство функций с интегрируемым квадратом обладает совершенно аналогичной „геометрией“; эта аналогия полностью выяснилась, когда немного позже Ф. Рисс и Э. Фишер доказали, что это пространство полно и изоморфно „пространству Гильберта“, блестящим образом выявив одновременно значение незадолго до этого созданного Лебегом орудия. С этого момента основные черты теории гильбертовых пространств можно считать определившимися; из более поздних достижений особо следует упомянуть аксиоматическое изложение теории, данное к 1930 году М. Строуном и И. фон Нейманном, а также отказ от ограничения „сепарабельностью“, осуществленный около 1934 года в работах Реллиха, Лёвига и Ф. Рисса (IXд).

Тем временем в первые годы двадцатого века и другие идейные течения усиливали тенденцию, приведшую к теории нормированных пространств. В последние десятилетия девятнадцатого века в связи с вариационным исчислеиием, с одной стороны, и теорией интегральных уравнений — с другой,

*) Следует отметить, что вплоть до 1935 года под „непрерывной“ функцией всегда практически понимали отображение, преобразующее каждую сходящуюся последовательность в сходящуюся последовательность.

**) По Гильберту, билиниейиая форма $B(x, y)$ вполне непрерывна, если $B(x_n, y_n)$ стремится к $B(x, y)$, когда последовательиости (x_n) и (y_n) *слабо* сходятся соответственно к x и y.

сформировалась общая идея „функционала" (т. е. числовой функции, определенной на множестве, элементы которого сами являются числовыми функциями одиого или нескольких вещественных переменных). Но хотя своим появлением на свет это понятие, как и более общая идея „оператора", было обязано в первую очередь итальянской школе — Пинкерле и особеино Вольтерра, — работы этой школы имели обычно довольно формальный характер и занимались задачами частного типа, причем в них отсутствовал сколько-нибудь серьезный анализ лежащих в основе топологических понятий. В 1903 году Адамар положил начало современной теории „топологической" двойственности, задавшись задачей разыскания наиболее общих непрерывных линейных „функционалов" на (наделенном топологией равномерной сходимости) пространстве $\mathcal{C}(I)$ всех непрерывных числовых функций на компактном интервале I и охарактеризовав их как пределы последовательностей интегралов $x \to \int_I k_n(t)\, x(t)\, dt$. С другой стороны, в 1907 г. Фреше и Ф. Рисс доказали, что непрерывные линейиые формы на пространстве Гильберта — это введенные Гильбертом „ограниченные" формы; далее, в 1909 году Ф. Рисс придал теореме Адамара окончательную форму, выразив каждый непрерывный лииейный функционал на $\mathcal{C}(I)$ интегралом Стилтьеса, что послужило позже отправным пунктом современной теории интегрирования (см. Исторический очерк к книге VI, гл. II — V).

В следующем году снова Ф. Рисс (IXa) сделал новый и важный шаг в теории введением и изучеиием (по образцу теории пространства Гильберта) пространств $L^p(I)$ функций с суммируемой p-й степенью на интервале I (для показателей p, удовлетворяющих условию $1 < p < +\infty$), продолженным три года спустя (IXв) аналогичной работой о пространствах последовательностей $L^p(\mathbf{N})$; эти исследования, как мы позже увидим, сделали очень много для выяснения идей двойственности тем, что здесь впервые встретились два пространства в двойственности, между которыми не было естественного изоморфизма *).

С этого момента Ф. Рисс размышляет об аксиоматическом исследовании, охватывающем все эти результаты ((IXa), стр. 452); и можно полагать, что лишь щепетильность аналитика, озабоченного тем, чтобы не слишком удалиться от классической математики, удержала его от написания в такой форме его знаменитого мемуара 1918 года о теории Фредгольма (IXг). В принципе он рассматривает пространство $\mathcal{C}(I)$ всех непрерывиых функций на компактном интервале I; но определив в этом пространстве норму и заметив, что $\mathcal{C}(I)$, снабженное этой нормой, полно, он нигде в своих дальнейших рассуждениях не пользуется ничем, кроме аксиом полных нор-

*) Хотя двойственность между L^1 и L^∞ неявно встречается в большинстве работ этого времени, относящихся к интегралу Лебега, лишь в 1918 году Г. Штейнгаузом было доказано, что каждая непрерывная линейная форма на $L^1(I)$ (для конечиого интервала I) имеет вид $x \to \int_I f(t)\, x(t)\, dt$, где $f \in L^\infty(I)$.

мированных пространств *). Не входя здесь в подробное рассмотрение этой работы, упомянем, что именно в ней впервые определяется общим образом понятие вполне непрерывного линейного отображения (свойством преобразовывать некоторую окрестность в относительно компактное множество) **); и — истинным шедевром аксиоматического анализа — вся теория Фредгольма (в ее качественном аспекте) сводится к одной фундаментальной теореме, а именно, что каждое локально компактное нормированное пространство конечномерно.

Общее определение нормированных пространств было дано в 1920—1922 годах С. Банахом, Х. Ханом и Э. Хелли (причем последний рассматривал лишь пространства последовательностей вещественных или комплексных чисел). В последующее десятилетие теория этих пространств развивалась главным образом вокруг двух вопросов, имеющих фуидаментальную важиость для приложений: теории двойственности и теорем, связанных с понятием „категории" Бэра.

Мы видели, что идея двойственности (в топологическом смысле) восходит к началу двадцатого века; она лежит в осиове теории Гильберта и занимает центральное место в работе Ф. Рисса. Этот последний, например, заметил в 1911 году ((IXб), стр. 41—42), рассматривая пространство $\mathcal{C}(I)$, что соотношение $|f(x)| \leqslant M\|x\|$ (принятое за определение „ограниченных" линейных функционалов в пространстве Гильберта) равносильно непрерывиости f, пользуясь при этом рассуждеиием совершенно общего характера. В связи с характеризацией непрерывных линейных функционалов иа $\mathcal{C}(I)$ он заметил также, что условием для того, чтобы множество A было плотно в $\mathcal{C}(I)$, является несуществование на I никакой меры Стилтьеса $\mu \neq 0$, которая была бы „ортогональна" ко всем функциям из A (обобщив этим условие Грама для полных ортонормальных систем); наконец, он установил, в той же работе, что сопряженное к пространству L^∞ „больше" пространства мер Стилтьеса ((IXб), стр. 62).

С другой стороны, в работах о пространствах $L^p(I)$ и $L^p(\mathbf{N})$ Ф. Риссу удалось видоизменить метод решения линейных систем в пространстве Гильберта, предложенный Э. Шмидтом (VIIIб), сделав его применимым в более общих случаях. Идея Э. Шмидта состояла в определении „экстремальиого" решения уравнений (6) путем разыскания точки замкнутого линейного многообразия, представляемого этими уравнениями, находящейся на

*) Впрочем, Ф. Рисс явно указывает, что применение его теорем к непрерывным функциям является здесь лишь „пробным камнем" для гораздо более общих концепций ((IXг), стр. 71).

**) В своих работах о пространствах L^p Ф. Рисс определял вполне непрерывные отображения, как отображения, преобразующие каждую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, что (учитывая слабую компактность единичного шара в пространствах L^p, где $1 < p < +\infty$) равносильно в этом случае данному выше определению; кроме того, Ф. Рисс указал, что для пространства L^2 его определение (переведенное с языка линейных отображений на язык билинейных форм) равносильно гильбертовскому ((IXа), стр. 487).

минимальном расстоянии от начала. Используя ту же идею, Ф. Рисс показывает, что для существования функции $x \in L^p(a, b)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\int_a^b a_i(t)\, x(t)\, dt = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

в которых функции a_i принадлежат L^q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и, кроме того, условию $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \leqslant M^p$, необходимо и достаточно, чтобы для любой конечной последовательности $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ вещественных чисел выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right| \leqslant M \left(\int_a^b \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

В 1911 году (IXб) он рассматривает аналогичным образом „обобщенную проблему моментов", заключающуюся в том, чтобы решить систему

$$\int_a^b a_i(t)\, d\xi(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где a_i непрерывны, а неизвестной является мера Стилтьеса ξ*); и здесь ясно видно, что эту проблему можно сформулировать как проблему определения непрерывного линейного функционала на $\mathcal{C}(I)$ по его значениям на заданной последовательности точек этого пространства. В такой форме Хелли и рассматривал эту проблему в 1912 году — получив условия Ф. Рисса методом, довольно сильно отличающимся от риссовского и обладающим более широкой областью применимости **), — и вернулся к ней, при гораздо

*) Классическая „проблема моментов" отвечает тому случаю, когда интервал $]a, b[$ есть $]0, +\infty[$ или $]-\infty, +\infty[$, а $a_i(t) = t^i$; кроме того, от меры ξ требуется еще положительность (в своем мемуаре 1911 года Ф. Рисс указывает, как должны быть видоизменены его общие условия при разыскании решений этого типа). Среди различных методов решения классической проблемы моментов следует особо отметить метод М. Рисса, изящно соединившего общие идеи функционального анализа и теории функций комплексного переменного для получения явных условий, которым должны удовлетворять b_i (Sur le problème de moments, 3., Ark. för Math., т. XVII (1922—1923), n° 16, 52 стр.).

**) Как и Ф. Рисс ((IXб), стр. 49—50), Хелли использует в этом доказательстве „принцип выбора", т. е., разумеется, не что иное, как слабую компактность единичного шара в пространстве мер Стилтьеса; Ф. Рисс пользовался аналогичным свойством также в пространствах $L^p (1 < p < +\infty)$.

более общих условиях, в 1921 году. Введя, как мы уже выше указывали, понятие нормы (на пространстве последовательностей), он заметил, что это понятие обобщает понятие „калибровочной функции" выпуклого тела в n-мерном пространстве, использованное Минковским в его знаменитых работах по „геометрии чисел" (IV). В этих работах Минковский определил также (в $\mathbf{R}^n$) понятия опорной гиперплоскости и „опорной функции" (IVб) и доказал существование опорной гиперплоскости в каждой граничной точке выпуклого тела ((IVa), стр. 33—35). Хелли распространил эти понятия на пространство последовательностей E, снабженное произвольной нормой; он установил двойственность между E и пространством E' последовательностей $u=(u_n)$ таких, что ряд $(u_n x_n)$ сходится для каждого $x=(x_n)\in E$ к некоторой сумме, которую мы обозначим $\langle u, x\rangle$; он определил в E' норму формулой $\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|\langle u, x\rangle|}{\|x\|}$, дающей в конечномерных пространствах опорную фуикцию*). Решение в E системы (6), где каждая из последовательностей $u_i=(a_{ij})_{j\geqslant 1}$ предполагается принадлежащей E', сводится, как показывает тогда Хелли, к последовательному решению следующих двух задач: 1° найти непрерывную линейную форму L на нормированном пространстве E' такую, что $L(u_i)=b_i$ для каждого номера i, что, как он указывает, приводит к условиям типа (10); 2° установить, может ли такая линейная форма быть представлена в виде $u\to\langle u, x\rangle$ с некоторым $x\in E$. Хелли замечает, что эта последняя задача не обязательно имеет положительное решение, даже когда L существует, и ограничивается указанием нескольких достаточных условий, влекущих существование решения $x\in E$ в некоторых частных случаях (X).

Эти идеи приобрели свою окончательную форму в 1927 году в фундаментальном мемуаре Х. Хана (XI), результаты которого были заново получены (независимым образом) С. Банахом двумя годами позже (XIIб). Метод Минковского — Хелли применяется Ханом к произвольному нормированному пространству и определяет тем самым в сопряженном пространстве структуру (полного) нормированного пространства; это сразу позволяет Хану рассматривать последовательные сопряженные к нормированному пространству и поставить в общем виде проблему рефлексивных пространств, лишь затронутую Хелли. Но главное — это что капитальная проблема продолжения непрерывного линейного функционала с сохранением его нормы была окончательно решена Ханом совершенно общим образом, с помощью трансфинитной индукции по числу измерений, чем был дан один из первых примеров важного применения аксиомы выбора к функциональному анализу**). К этим результатам Банах присоединил основополагающее исследование связей

*) Для того чтобы получить так норму, следует предположить, что если $\langle u, x\rangle=0$ для всех $x\in E$, то $u=0$, что, впрочем, Хелли явно и отмечает.

**) Банах уже провел аналогичное рассуждение в 1923 году для определения инвариантной меры на плоскости (определенной для *всех* ограниченных множеств) (XIIa).

между непрерывным линейным отображением и его сопряженным, распространив на общие нормированные пространства результаты, известные до этого лишь для пространств L^p (IXa), с помощью весьма глубокой теоремы о слабо замкнутых множествах в сопряженном пространстве (см. гл. IV, § 2, теорема 5); впрочем, эти результаты выражаются в более яркой форме при использовании понятия факторпространства нормированного пространства, введенного несколькими годами позже Хаусдорфом и самим Банахом. Наконец, сиова Баиах открыл связь между слабой компактностью единичного шара (как было указано выше, отмеченной во многих частных случаях) и рефлексивностью, по крайней мере для пространств счетного типа ((XIIв), стр, 189). С этого момента теория двойственности нормированных пространств может считаться в своих основных чертах определившейся.

К тому же времени получили разъяснение также теоремы парадоксального характера, первые примеры которых восходят приблизительно к 1910 году. А именно, Хеллингер и Теплиц по существу доказали в указанном году, что последовательность ограниченных билинейных форм $B_n(x, y)$ в пространстве Гильберта, значения которых $B_n(a, b)$ для каждой заданной пары (a, b) ограничены сверху (числом, априори зависящим от a и b), на самом деле *равномерно ограничена* на каждом шаре. Их доказательство велось от противного и состояло в построении пары (a, b), в которой нарушается предположение, посредством рекуррентного метода, известного с тех пор под наименованием „метода скользящего горба" и оказавшегося полезным еще в ряде аналогичных вопросов (см. гл. IV, § 5, упражнение 4). Впрочем, в 1905 году Лебег использовал аналогичный прием для доказательства существования непрерывных функций, ряд Фурье которых в некоторых точках расходится, и в том же году, что Хеллингер и Теплиц, он использовал тот же метод для доказательства того, что слабо сходящаяся последовательность в L^1 ограниченна по норме *). Количество этих примеров в последующие годы умножилось, но без введения новых идей, пока в 1927 году Банах и Штейнгауз (отчасти в сотрудничестве с С. Саксом) не связали эти явления с понятием множества II категории и теоремой Бэра для полных метрических пространств, получив общее предложение, охватившее все предшествовавшие частные случаи (XIII). При этом изучение вопросов „категории" в полных нормированных пространствах привело Банаха в тот же период к многочисленным другим результатам относительно непрерывных линейных отображений, из которых наиболее замечательной и, несомненно, наиболее глубокой явилась теорема о „замкнутом графике", оказавшаяся, как и теорема Банаха — Штейнгауза, первоклассным орудием современного функционального анализа (XIIб).

*) Отметим также аналогичную (более простую) теорему, доказанную Ландау в 1907 году и послужившую для Ф. Рисса отправным пунктом его теории пространств L^p: если ряд с общим членом $u_n x_n$ сходится для любой последовательности $(x_n) \in L^p(\mathbf{N})$, то последовательность (u_n) принадлежит $L^q(\mathbf{N})$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Опубликование монографии Банаха „Теория линейных операций" (XIIв) ознаменовало, если так можно сказать, наступление зрелости теории нормированных пространств. В этой книге изложены все результаты, о которых мы говорили, равно как и многие другие, правда несколько беспорядочно, но в сопровождении многочисленных ярких примеров, взятых из различных областей анализа и, по-видимому, предвещавших теории блестящее будущее. Действительно, это сочинение имело замечательный успех и одним из наиболее непосредственных последствий его появления было почти всеобщее усвоение языка и обозначений, использованных Банахом. Но несмотря на большое число предпринятых после 20-х годов исследований по пространствам Банаха, в оставленных им открытыми проблемах не было достигнуто существенного прогресса; с другой стороны, — если исключить теорию банаховских алгебр и ее применения к гармоническому анализу, — почти полное отсутствие новых применений теории к большим проблемам классического анализа несколько охладило возлагавшиеся на нее надежды.

Более плодотворным, пожалуй, было развитие в сторону расширения и более тщательного аксиоматического анализа концепций, связанных с нормированными пространствами. Хотя функциональные пространства, встречавшиеся с начала двадцатого века, были в своем большинстве снабжены „естественной" нормой, не прошли незамеченными и некоторые исключения. Около 1910 года Э. Мур предложил обобщить понятие равномерной сходимости, заменив его понятием „относительной равномерной сходимости", при которой окрестность нуля образована функциями f, удовлетворяющими неравенству $|f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$, где g — функция, которая всюду > 0 и может меняться вместе с окрестностью. С другой стороны, уже до 1930 года было замечено, что такие понятия, как простая сходимость, сходимость по мере для измеримых функций или компактная сходимость для целых функций, не поддаются определению посредством нормы; а в 1926 году Фреше установил, что векторные пространства этого типа могут быть метризуемыми и полными. Но теория этих более общих пространств могла плодотворно развиваться лишь в соединении с идеей выпуклости. Эту последнюю идею (как мы видели, встречавшуюся уже у Хелли) Банах и его ученики сделали объектом исследований, усмотрев возможность более геометрически истолковывать так многочисленные предложения теории нормированных пространств и подготовив дорогу общему определению локально выпуклых пространств, данному И. фон Нейманном в 1935 году. Теория этих пространств и особенно вопросов, касающихся двойственности, получила развитие главным образом в течение последнего десятилетия, и в этой книге мы изложили основные результаты этих исследований. В связи с этим следует отметить, с одной стороны, прогресс в простоте и общности, сделавшийся возможным благодаря приведению в полную ясность фундаментальных понятий общей топологии, достигнутому между 1930 и 1940 годами; с другой стороны, важность, которую приобрело понятие ограниченного множества, введенное Колмогоровым и фон Нейманном в 1935 году и фундаментальная роль которого была выяснена работами Макки (XIV). Наконец, и главным

образом, несомненно, что основным импульсом, мотивировавшим эти исследования, послужили новые возможности приложения к анализу в областях, где теория Банаха оказалась недейственной; в этой связи следует упомянуть теорию пространств последовательностей, развитую Кёте, Теплицом и их учениками в ряде мемуаров после 1934 года (XV), недавнее приданне совершенной формы теорин „аналнтических функционалов" Фантапье и особенно теорию распределений Л. Шварца (XVI), в которой современная теория локально выпуклых пространств нашла поле примененнй, несомненно, еще далекое от нсчерпания.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) C. Sturm: a) Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journ. de Math. (1), **I** (1836), 106—186;
б) Sur une classe d'équations à différences partielles, там же, стр. 373—444.

(II) J. Liouville: a) Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, Journ. de Math. (1), **I** (1836), 253—265, **II** (1837), 16—35 и 418—436; б) D'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes, там же, **I** (1836), 269—277.

(III) J. P. Gram, Ueber die Entwickelung reeller Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, J. de Crelle, **XCIV** (1883), 41—73.

(IV) H. Minkowski: a) Geometrie der Zahlen, 1-е изд., Leipzig (Teubner), 1896; б) Theorie der konvexen Körper, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 131—229, Leipzig — Berlin (Teubner), 1911.

(V) H. Poincaré: a) Sur les équations de la Physique mathématique, Rend. Palermo, **VIII** (1894), 57—156 (= Oeuvres, т. IX, стр. 123—196, Paris (Gauthier — Villars), 1954); б) La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Acta Mathematica, **XX** (1896), 59—142 (= Oeuvres, т. IX, стр. 202—272, Paris (Gauthier — Villars), 1954).

(VI) I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Mathematica, **XXVII** (1903), 365—390.

(VII) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie des linearen Integralgleichungen, Leipzig — Berlin (Teubner), 1912 (= Gött. Nachr., 1904, 1905, 1906, 1910).

(VIII) E. Schmidt: a) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann., **LXIII** (1907), 433—476; б) Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. Palermo, **XXV** (1908), 53—77.

(IX) F. Riesz: a) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen, **LXIX** (1910), 449—497; б) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Ann. Ec. Norm. Sup. (3), **XXVIII** (1911), 33—62; в) Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris (Gauthier — Villars), 1913; г) Ueber lineare Funktionalgleichungen, Acta Mathematica, **XLI** (1918), 71—98 [русский перевод: Ф Рисс, О линейных функциональных уравнениях, Успехи математических наук, **I** (1936),

175—199]; д) Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, Acta litt. ac. scient. (Szeged), **VII** (1934—35), 34—38.

(X) E. Helly, Ueber Systeme linearer Gleihungen mit unendlich vielen Unbekannten, Monatshefte für Math. und Physik, **XXXI** (1921), 60—91.

(XI) H. Hahn, Ueber lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, J. de Crelle, **CLVII** (1927), 214—229.

(XII) S. Banach: а) Sur le problème de la mesure, Fund. Math., **IV** (1923), 7—33; б) Sur les fonctionnelles linéaires, Studia Math., **I** (1929), 211—216 и 223—239; в) Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932 [украинский перевод: С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948].

(XIII) S. Banach, H. Steinhaus, Sur le principe de condensation des singularités, Fund. Math., **IX** (1927), 50—61.

(XIV) G. W. Mackey: а) On infinite-dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **LVII** (1945), 155—207; б) On convex topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **LX** (1946), 519—537.

(XV) G. Köthe, Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, Math. Nachr., **IV** (1951), 70—80.

(XVI) L. Schwartz, Théorie des distributions, Actual. Scient. et Ind., n°n° 1091 и 1122, Paris (Hermann), 1950—51.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Введение

Результаты, сформулированные в этой сводке, сгруппированы вокруг фундаментальных понятий теории топологических векторных пространств. Некоторые формулируются несколько раз; кроме того, нередко случается, что какое-нибудь понятие упоминается в параграфе, предшествующем тому, где оно определено; терминологический указатель, помещенный в конце книги, содержит точную ссылку на то место этой сводки, где дано его определение. Понятия и результаты книг I — IV, использованные в книге V, предполагаются известными *).

Соответственно своему характеру эта сводка не содержит никаких доказательств сформулированных в ней результатов; наиболее трудные теоремы сопровождены ссылкой на место книги, где находится доказательство.

§ 1. Топологические векторные пространства; окрестности, полунормы, ограниченные миожества

Под *векторным пространством* всюду в этой сводке понимается векторное пространство, телом скаляров которого служит тело **R** всех вещественных чисел или тело **C** всех комплексных чисел. Если в формулировке какого-либо утверждения тело скаляров явно не упомянуто, то подразумевается, что это утверждение справедливо как в том случае, когда телом скаляров служит **R**, так и в том случае, когда телом скаляров служит **C**.

Топологические векторные пространства

1. *Вещественным* (соотв. *комплексным*) *топологическим векторным пространством* называется множество E, наделенное структурой векторного пространства над **R** (соотв. **C**) и топологией, согласующейся со структурой аддитивной группы в E и удовлетворяющей, кроме того, следующей аксиоме:

*) См. Приложения I и III. — *Прим. перев.*

(EVT) *Отображение* $(\lambda, x) \to \lambda x$ *произведения* $\mathbf{R} \times E$ (соотв. $\mathbf{C} \times E$) *в* E *непрерывно.*

Тогда мы говорим, что структура векторного пространства в E и топологическая структура *согласуются.*

Если E — комплексное топологическое векторное пространство, то ограничение тела скаляров телом $\mathbf{R}$ превращает E в вещественное топологическое векторное пространство E_0, именуемое *базисным* для пространства E.

2. Каждое отделимое топологическое векторное пространство конечной размерности n над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$) изоморфно произведению $\mathbf{R}^n$ (соотв. $\mathbf{C}^n$) (гл. I, § 2, теорема 2). Каждое отделимое топологическое векторное пространство, в котором существует предкомпактная окрестность нуля, конечномерно (гл. I, § 2, теорема 3).

3. Множество A в векторном пространстве E называется *уравновешенным*, если $\lambda A \subset A$ для каждого λ с $|\lambda| \leqslant 1$. *Уравновешенной оболочкой* произвольного множества A из E называется наименьшее уравновешенное множество, содержащее A: это — объединение всех λA с $|\lambda| \leqslant 1$. В отделимом топологическом векторном пространстве уравновешенная оболочка компактного множества компактна.

Множество A в векторном пространстве E *поглощает* множество B, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda A \supset B$ для всех λ с $|\lambda| \geqslant \alpha$. Множество A в E называется *поглощающим*, если оно поглощает каждую точку из E. В топологическом векторном пространстве окрестность нуля — поглощающее множество; в локально выпуклом пространстве бочка — поглощающее множество.

4. В топологическом векторном пространстве существует фундаментальная система $\mathfrak{S}$ замкнутых окрестностей нуля такая, что:

($\mathrm{EV_I}$) *Каждое* $V \in \mathfrak{S}$ — *уравновешенное и поглощающее.*

($\mathrm{EV_{II}}$) $\mathfrak{S}$ *инвариантно относительно всех гомотетий с ненулевым коэффициентом.*

($\mathrm{EV_{III}}$) *Для каждого* $V \in \mathfrak{S}$ *существует* $W \in \mathfrak{S}$ *такое, что* $W + W \subset V$.

Обратно, каждый базис фильтра $\mathfrak{S}$ в векторном пространстве E, обладающий свойствами ($\mathrm{EV_I}$) и ($\mathrm{EV_{III}}$), однозначно определяет в E структуру топологического векторного пространства, имеющую $\mathfrak{S}$ фундаментальной системой окрестностей нуля.

Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех множеств из $\mathfrak{S}$ приводилось к элементу 0.

5. Так как в топологическом векторном пространстве E топология согласуется со структурой группы, то она определяет в E равномерную структуру. Пусть E отделимо и $\hat{E}$ — его пополнение; отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $\mathbf{R} \times E$ (соотв. $\mathbf{C} \times E$) в E продолжается по непрерывности до билинейного отображения $\mathbf{R} \times \hat{E}$ (соотв. $\mathbf{C} \times \hat{E}$) в $\hat{E}$; тем самым $\hat{E}$ наделяется структурой топологического векторного пространства над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$) и называется *пополнением* топологического векторного пространства E.

6. Для того чтобы топологическое векторное пространство было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимо и обладало счетной фундаментальной системой окрестностей нуля.

Локально выпуклые пространства

7. Топологическое векторное пространство E называется *локально выпуклым*, если оно обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, каждая из которых выпукла. Тогда существует фундаментальная система $\mathfrak{S}$ окрестностей нуля, образованная замкнутыми поглощающими уравновешенными выпуклыми множествами. Если E метризуемо, то $\mathfrak{S}$ можно предполагать счетной.

Обратно, если $\mathfrak{S}$ — базис фильтра в векторном пространстве E, инвариантный относительно всех гомотетий с ненулевыми коэффициентами и образованный из поглощающих уравновешенных выпуклых множеств, то в E существует однозначно определенная топология, согласующаяся со структурой векторного пространства и имеющая $\mathfrak{S}$ фундаментальной системой окрестностей нуля; наделенное этой топологией, E локально выпукло.

8. *Полунормой* на векторном пространстве E называется каждая числовая функция $p \geqslant 0$ на E, удовлетворяющая следующим условиям:

$(\mathrm{SN_I})$ $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

$(\mathrm{SN_{II}})$ $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Если, кроме того, $p(x) = 0$ лишь при $x = 0$, то p называется *нормой* на E.

Множество Γ полунорм на E называется *фильтрующимся*, если для любых двух полунорм $p_1 \in \Gamma$ и $p_2 \in \Gamma$ существуют полунорма $q \in \Gamma$ и числа $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ такие, что $p_1 \leqslant a_1 q$ и $p_2 \leqslant a_2 q$.

Пусть Γ — некоторое множество полунорм на E, $\mathfrak{G}$ — множество всех подмножеств из E, определяемых неравенствами вида $p(x) \leqslant \lambda$,

где $p \in \Gamma$ и $\lambda > 0$, и $\mathfrak{S}$ — множество пересечений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{G}$. В E существует однозначно определенная топология, согласующаяся со структурой векторного пространства и имеющая $\mathfrak{S}$ фундаментальной системой окрестностей нуля. Она называется топологией, *определяемой множеством* Γ *полунорм.*

Каждая топология, определяемая некоторым множеством полунорм, локально выпукла. Обратно, каждая локально выпуклая топология может быть определена некоторым множеством полунорм, например множеством всех непрерывных полунорм.

9. Пусть E — локально выпуклое пространство, топология которого определена семейством Γ полунорм. Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы отношение „$p(x) = 0$ для всех $p \in \Gamma$" влекло $x = 0$. Равномерная структура в E определяется семейством отклонений $p(x - y)$ $(p \in \Gamma)$; полунормы $p \in \Gamma$ равномерно непрерывны; если E отделимо, то они продолжаются по непрерывности до полунорм на пополнении $\hat{E}$ пространства E, определяющих топологию в $\hat{E}$.

Для того чтобы локально выпуклое пространство E было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы его топологию можно было определить счетным семейством полунорм. *Нормированное* пространство — это векторное пространство, наделенное нормой и (метризуемой) топологией, определяемой этой нормой.

Ограниченные множества

10. Множество в топологическом векторном пространстве называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля. Объединение любого конечного набора ограниченных множеств, каждое подмножество ограниченного множества, образ ограниченного множества при любой гомотетии — ограниченные множества.

Фундаментальной системой ограниченных множеств называется всякое множество $\mathfrak{S}$ ограниченных множеств такое, что каждое ограниченное множество из E содержится в одном из множеств, принадлежащих $\mathfrak{S}$. В нормированном пространстве шары $\|x\| \leqslant n$ (n — целые $\geqslant 1$) образуют фундаментальную систему ограниченных множеств.

11. Каждое предкомпактное множество ограниченно. Множество точек последовательности Коши ограниченно. Для того чтобы мно-

жество A было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности (x_n) элементов из A и любой последовательности скаляров (λ_n), стремящейся к нулю, последовательность $(\lambda_n x_n)$ стремилась к нулю.

12. Для того чтобы подмножество A векторного подпространства E топологического векторного пространства F было ограниченным в E, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченно в F. Для того чтобы подмножество произведения топологических векторных пространств было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы была ограниченной каждая из его проекций.

Образ ограниченного множества при непрерывном линейном отображении или произведения ограниченных множеств при непрерывном полилинейном отображении есть ограниченное множество.

13. Пусть E — локально выпуклое пространство и Γ — семейство полунорм, определяющее топологию в E. Для того чтобы множество $A \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы на A была ограниченной каждая полунорма $p \in \Gamma$, и достаточно, чтобы каждая непрерывная линейная форма на E была ограниченной на A, иначе говоря, чтобы A было ограниченным в ослабленной топологии, соответствующей топологии, заданной на E (гл. IV, § 2, теорема 3).

14. В локально выпуклом пространстве уравновешенная замкнутая выпуклая оболочка ограниченного множества ограниченна, и существует фундаментальная система ограниченных множеств, образованная из уравновешенных замкнутых выпуклых множеств.

15. Пусть E — локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом последовательности (E_n) локально выпуклых пространств, причем все E_n замкнуты в E; для того чтобы множество $A \subset E$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось и было ограниченным в одном из пространств E_n.

16. Топологическое векторное пространство E называется *квазиполным* если каждое ограниченное замкнутое множество в E полно; в квазиполном пространстве каждая последовательность Коши сходится. Каждое полное топологическое векторное пространство квазиполно и каждое квазиполное метризуемое пространство полно. Произведение любого семейства квазиполных пространств квазиполно.

§ 2. Линейные и полилинейные отображения

Непрерывные линейные отображения

1. Пусть E и F — топологические векторные пространства и u — линейное отображение E в F. Для того чтобы u было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно в точке 0, причем тогда u равномерно непрерывно. Если топологии в E и F определяются семействами Γ и Γ' полунорм, то необходимо и достаточно, чтобы для каждой полунормы $q \in \Gamma'$ существовали число $\alpha \geqslant 0$ и конечное семейство полунорм $p_i \in \Gamma$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что $q(u(x)) \leqslant \alpha \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$ для всех $x \in E$. В частности, если E и F — нормированные пространства, то необходимо и достаточно, чтобы существовало $a \geqslant 0$ такое, что $\|u(x)\| \leqslant a\|x\|$ для всех $x \in E$. Нижняя грань чисел a, удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой* отображения u и обозначается $\|u\|$; она определяет в векторном пространстве $L(E, F)$ структуру нормированного векторного пространства; если F — банаховское пространство, то и $L(E, F)$ — банаховское пространство.

2. Для того чтобы линейная форма u на топологическом векторном пространстве E была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскость $u^{-1}(0)$ была замкнута в E (гл. I, § 2, теорема 1). Если E локально выпукло, то для этого необходимо и достаточно, чтобы на E существовала непрерывная полунорма p такая, что $|u(x)| \leqslant p(x)$.

3. Пусть E и F — топологические векторные пространства, причем F отделимо, и M — всюду плотное векторное подпространство в E. Каждое непрерывное линейное отображение M в F может быть продолжено до непрерывного линейного отображения E в F при выполнении одного из следующих двух условий:

а) F полно;

б) F квазиполно и каждая точка пространства E есть точка прикосновения некоторого ограниченного множества из M.

4. Пусть E — векторное пространство, p — полунорма на E, V — векторное подпространство в E и f — линейная форма на V такая, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in V$. Тогда на E существует линейная форма $\bar{f}$, продолжающая f и такая, что $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in E$ (теорема Хана — Банаха (аналитическая форма); гл. II, § 5, теорема 1

и § 6, теорема 1). Для каждого $x_0 \in E$ существует линейная форма g на E такая, что $|g(x)| \leqslant p(x)$ и $g(x_0) = p(x_0)$.

В частности, всякая непрерывная линейная форма на векторном подпространстве локально выпуклого пространства может быть продолжена (вообще бесконечным множеством способов) до непрерывной линейной формы на всем пространстве. Если пространство — нормированное, то среди этих продолжений существует имеющее ту же норму, что и заданная линейная форма.

5. Пусть E — бочечное пространство, F — отделимое локально выпуклое пространство и (u_n) — последовательность непрерывных линейных отображений E в F. Если последовательность $(u_n(x))$ для каждого $x \in E$ стремится к $u(x) \in F$, то u есть непрерывное линейное отображение E в F (теорема Банаха — Штейнгауза; гл. III, § 3, следствие теоремы 2).

Если E и F — банаховские пространства и $(u_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство непрерывных линейных отображений E в F такое, что $\sup_{\iota \in I} \|u_\iota(x)\| < +\infty$ для каждого $x \in E$, то $\sup_{\iota \in I} \|u_\iota\| < +\infty$.

6. Пусть E и F — полные метризуемые векторные пространства и u — линейное отображение E в F. Если его график замкнут в $E \times F$ (т. е. из $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ и $\lim_{n \to \infty} u(x_n) = y$ следует $y = 0$), то u непрерывно (теорема о замкнутом графике; гл. I, § 3, следствие 5 теоремы 1).

Гомоморфизмы

7. Пусть E и F — топологические векторные пространства и u — линейное отображение E в F. Говорят, что u — ***гомоморфизм***, если ассоциированное с u взаимно однозначное отображение $E/u^{-1}(0)$ на $u(E)$ есть изоморфизм (для структур топологического векторного пространства); для этого необходимо и достаточно, чтобы u было непрерывно и образ каждого открытого множества из E был открытым множеством в $u(E)$.

Пусть u — непрерывное линейное отображение E в F; каждое из следующих двух свойств достаточно для того, чтобы u было гомоморфизмом:

а) $u(E)$ отделимо и конечномерно (гл. I, § 2, следствие предложения 3);

б) E и $u(E)$ метризуемы и полны (гл. I, § 3, теорема 1).

Каждый гомоморфизм u пространства E на $u(E)$ при заданных исходных топологиях в E и F есть также гомоморфизм при ослабленных топологиях $\sigma(E, E')$ и $\sigma(F, F')$.

Билинейные отображения

8. Пусть E, F, G — топологические векторные пространства и u — билинейное отображение $E \times F$ в G. Для того чтобы u было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно в точке $(0, 0)$.

9. Обозначим через $u_{x.}$ для каждого $x \in E$ линейное отображение $y \to u(x, y)$ пространства F в G и через $u_{.y}$ для каждого $y \in F$ — линейное отображение $x \to u(x, y)$ пространства E в G.

u называется *раздельно непрерывным*, если $u_{x.}$ и $u_{.y}$ непрерывны, каковы бы ни были $x \in E$ и $y \in F$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $u_{.y}$ было непрерывно при каждом $y \in F$ и отображение $y \to u_{.y}$ пространства F в $L(E, G)$ было непрерывно при наделении $L(E, G)$ топологией простой сходимости.

Каждое непрерывное билинейное отображение раздельно непрерывно.

10. Пусть u — раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства E уравновешенными ограниченными множествами. Следующие свойства равносильны:

а) Для каждой окрестности нуля W из G и каждого $M \in \mathfrak{S}$ существует окрестность нуля V в F такая, что $u(M \times V) \subset W$.

б) Образ каждого $M \in \mathfrak{S}$ при отображении $x \to u_{x.}$ есть равностепенно непрерывное множество в $L(F, G)$.

в) $y \to u_{.y}$ есть непрерывное отображение F в $L_{\mathfrak{S}}(E, G)$.

Раздельно непрерывное билинейное отображение u, обладающее приведенными свойствами, называется $\mathfrak{S}$-*гипонепрерывным*. Если u $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно, то $u(M \times B)$ ограниченно в G для каждого $M \in \mathfrak{S}$ и каждого ограниченного множества B из F, причем сужение u на $M \times F$ непрерывно.

11. Поменяв в вышесказанном ролями E и F, приходим к определению понятия $\mathfrak{T}$-гипонепрерывности, где $\mathfrak{T}$ — покрытие пространства F уравновешенными ограниченными множествами. Билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G, являющееся одновременно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывным и $\mathfrak{T}$-гипонепрерывным, называется ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$)-*гипо-*

непрерывным. Сужение такого отображения на каждое $M \times N$, где $M \in \mathfrak{S}$ и $N \in \mathfrak{T}$, равномерно непрерывно.

12. Непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно при любых $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$. Если F — бочечное пространство, то каждое раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно при любом $\mathfrak{S}$ (гл. III, § 4, предложение 6). Если E метризуемо, а F метризуемо и бочечно, то каждое раздельно непрерывное билинейное отображение $E \times F$ в G непрерывно (гл. III, § 4, предложение 2).

13. Пусть E_0 и F_0 — всюду плотные векторные подпространства в E и F соответственно. Пусть, далее, $\mathfrak{S}_0$ (соотв. $\mathfrak{T}_0$) — покрытие E_0 (соотв. F_0) уравновешенными ограниченными множествами такое, что каждая точка из E (соотв. F) есть точка прикосновения некоторого множества из $\mathfrak{S}_0$ (соотв. $\mathfrak{T}_0$). Пусть, наконец, $\mathfrak{S}$ (соотв. $\mathfrak{T}$) — множество замыканий в E (соотв. F) всевозможных множеств из $\mathfrak{S}_0$ (соотв. $\mathfrak{T}_0$). Если тогда G отделимо и квазиполно, то каждое $(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{T}_0)$-гипонепрерывное билинейное отображение $E_0 \times F_0$ в G однозначно продолжается до раздельно непрерывного билинейного отображения $E \times F$ в G, причем последнее $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно.

14. Пусть R, S и T — отделимые локально выпуклые пространства. Будем всюду в этом n° предполагать, что $L(R, S)$, $L(S, T)$ и $L(R, T)$ наделены *все три* топологией простой (соотв. компактной, ограниченной) сходимости. Тогда отображение $(u, v) \to v \circ u$ произведения $L(R, S) \times L(S, T)$ в $L(R, T)$ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывно, где $\mathfrak{T}$ — множество всех равностепенно непрерывных подмножеств из $L(S, T)$, а $\mathfrak{S}$ — множество уравновешенных оболочек всевозможных конечных подмножеств из $L(R, S)$ (соотв. всех уравновешенных компактных или ограниченных подмножеств из $L(R, S)$) (гл. III, § 4, предложение 9). В частности, это билинейное отображение непрерывно на каждом произведении $L(R, S) \times H$, где H — равностепенно непрерывное множество из $L(S, T)$.

Если S бочечно, (u_n) — последовательность из $L(R, S)$, сходящаяся к u, и (v_n) — последовательность из $L(S, T)$, сходящаяся к v, то последовательность $(v_n \circ u_n)$ сходится в $L(R, T)$ к $v \circ u$ (гл. III, § 4, следствие 2 предложения 9).

§ 3. Подпространства; факторпространства; произведения; прямые суммы

Подпространства

1. Пусть E — топологическое векторное пространство и M — его векторное подпространство. Топология, индуцируемая в M из E, превращает M в топологическое векторное пространство, называемое *топологическим векторным подпространством* пространства E. Если E отделимо (соотв. метризуемо, локально выпукло), то и M отделимо (соотв. метризуемо, локально выпукло). Если топология пространства E определяется некоторым семейством полунорм, то топология подпространства M определяется сужениями этих полунорм на M.

2. Замыкание M в E есть векторное подпространство в E. Если M конечномерно, а E отделимо, то M замкнуто в E (гл. I, § 2, следствие 1 теоремы 2). Каждая гиперплоскость либо замкнута, либо всюду плотна; для ее замкнутости необходимо и достаточно, чтобы она была ядром непрерывной линейной формы (гл. I, § 2, теорема 1).

3. *Замкнутым векторным подпространством, порожденным множеством* $A \subset E$, называется замыкание векторного подпространства, порожденного этим множеством; это — наименьшее замкнутое векторное подпространство, содержащее A. Если E локально выпукло, то это подпространство есть также пересечение всех замкнутых гиперплоскостей из E, содержащих A, или также множество общих нулей всех непрерывных линейных форм на E, аннулирующихся на A (гл. II, § 3, следствие 3 предложения 4).

Множество $A \subset E$ называется *тотальным*, если порождаемым им замкнутым векторным подпространством служит всё E. Для того чтобы подмножество A локально выпуклого пространства E было тотальным, необходимо и достаточно, чтобы всякая непрерывная линейная форма на E, равная нулю на A, была тождественно равна нулю.

4. Семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ точек из E называется *топологически свободным*, если для каждого $\varkappa \in I$ замкнутое векторное подпространство, порожденное теми x_ι, у которых $\iota \neq \varkappa$, не содержит $x_\varkappa$. Топологически свободное семейство и алгебраически свободно; конечное алгебраически свободное семейство в отделимом пространстве топологически свободно. Для того чтобы семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ точек ло-

кально выпуклого пространства E было топологически свободным, необходимо и достаточно, чтобы на E существовало семейство $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ непрерывных линейных форм такое, что $f_\lambda(x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}$ (где $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера). В предгильбертовом пространстве каждое ортонормальное семейство топологически свободно.

Факторпространства

5. Пусть E — топологическое векторное пространство и M — его векторное подпространство. Фактортопология топологии пространства E по M превращает E/M в топологическое векторное пространство, называемое *топологическим векторным факторпространством пространства E по M*. Для того чтобы E/M было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы M было замкнуто в E. Если E локально выпукло, то E/M локально выпукло; если топология пространства E определяется фильтрующимся семейством Γ полунорм, то топология в E/M определяется полунормами

$$\dot{p}(\dot{x})=\inf_{z\in\dot{x}} p(z),$$

где p пробегает Γ. Если E метризуемо и полно, то E/M метризуемо и полно, но E может быть полным (не метризуемым) и без того, чтобы E/M было полно.

Произведения топологических векторных пространств

6. Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических векторных пространств. Произведение их топологий превращает $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ в топологическое векторное пространство, называемое *произведением топологических векторных пространств E_ι*. Для того чтобы $\prod_{\iota\in I}E_\iota$ было отделимым (соотв. локально выпуклым, квазиполным, полным), необходимо и достаточно, чтобы таким было каждое E_ι. Если топология каждого E_ι определяется семейством Γ_ι полунорм, то топология произведения $\prod_{\iota\in I}E_\iota$ определяется полунормами $p_\iota\circ f_\iota$, где $p_\iota\in\Gamma_\iota$, а f_ι означает проекцию $\prod_{\iota\in I}E_\iota$ на E_ι.

7. Произведение счетного семейства метризуемых векторных пространств метризуемо. Каждое локально выпуклое пространство изоморфно подпространству некоторого произведения банаховских

пространств. Каждое метризуемое локально выпуклое пространство изоморфно подпространству произведения счетного семейства банаховских подпространств.

Конечные прямые суммы

8. Пусть E — топологическое векторное пространство, являющееся (для структур векторного пространства) прямой суммой конечного семейства $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ его векторных подпространств. Если отображение $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ произведения $\prod_{i=1}^{n} M_i$ на E есть изоморфизм топологических векторных пространств, то E называется *топологической прямой суммой* подпространств M_i; если E отделимо, то M_i тогда замкнуты в E. Обратно, если E отделимо и является (для структур векторного пространства) прямой суммой конечного семейства $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ своих замкнутых подпространств, то для того, чтобы E было их топологической прямой суммой, достаточно выполнения любого из следующих двух условий:

а) Каждое из подпространств M_i, за исключением, быть может, одного, конечномерно (гл. I, § 2, предложение 3).

б) E метризуемо и полно (гл. I, § 3, следствие 4 теоремы 1).

9. Пусть E — топологическое векторное пространство, являющееся (в алгебраическом смысле) прямой суммой конечного семейства своих векторных подпространств M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и k_i для каждого i — линейное отображение, относящее каждому $x \in E$ его составляющую $k_i(x)$ в M_i. Отображения k_i удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &k_i \circ k_j = 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ &k_i \circ k_i = k_i, \\ &\sum_{i=1}^{n} k_i = e \text{ (тождественному отображению).} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Для того чтобы E было топологической прямой суммой подпространств M_i, необходимо и достаточно, чтобы отображения k_i были непрерывны. Обратно, пусть $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — семейство непрерывных линейных отображений E в E, удовлетворяющих соотношениям (1) (второе из которых выражают, говоря, что k_i — *проекторы*); тогда E есть топологическая прямая сумма подпространств $M_i = k_i(E)$.

10. Если E — топологическая прямая сумма двух своих векторных подпространств M и N, то N называется *топологическим допол-*

нением к M. Обратно, пусть M — замкнутое векторное подпространство пространства E, предполагаемого отделимым; для того чтобы M обладало топологическим дополнением, достаточно выполнения любого из следующих трех условий:

а) E — предгильбертово пространство и M полно (гл. V, § 1, предложение 8).

б) M имеет конечную факторразмерность в E (в этом случае каждое подпространство, дополнительное к M в алгебраическом смысле, есть топологическое дополнение к M) (гл. I, § 2, предложение 3).

в) E локально выпукло и M конечномерно (гл. II, § 3, следствие 6 предложения 4).

11. Вообще для того, чтобы векторное подпространство M топологического векторного пространства E обладало топологическим дополнением, необходимо и достаточно, чтобы на E существовал непрерывный проектор u такой, что $u(E) = M$; тогда за топологическое дополнение к M можно принять подпространство $u^{-1}(0)$, в которое E переводится проектором $e - u$. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между парами (M_1, M_2) векторных подпространств пространства E, топологически дополнительных одно другому, и парами (u_1, u_2) непрерывных проекторов, для которых $u_1 + u_2 = e$.

Если E — предгильбертово пространство, а M — его полное отделимое векторное подпространство, то существует однозначно определенный проектор p пространства E на M такой, что $p^{-1}(0)$ ортогонально к M; p называется *ортогональным проектором* E на M.

12. Пусть E и F — топологические векторные пространства и f — непрерывное линейное отображение E в F. Для того чтобы f было *обратимо справа* (т. е. чтобы существовало непрерывное линейное отображение g пространства F в E, удовлетворяющее условию $f \circ g = e'$, где e' — тождественное отображение F на себя), необходимо и достаточно, чтобы f было гомоморфизмом E на F и $f^{-1}(0)$ имело топологическое дополнение в E. Для того чтобы f было *обратимо слева* (т. е. чтобы существовало непрерывное линейное отображение g пространства F в E, удовлетворяющее условию $g \circ f = e$, где e — тождественное отображение E на себя), необходимо и

достаточно, чтобы f было изоморфизмом E на $u(E)$ и $u(E)$ имело топологическое дополнение в F.

Различные способы введения топологии

13. Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических векторных пространств и f_ι для каждого $\iota\in I$ — линейное отображение векторного пространства E в F_ι. *Слабейшая* из топологий в E, при которых все f_ι непрерывны, согласуется со структурой векторного пространства в E. Для того чтобы линейное отображение g топологического векторного пространства G в E было непрерывно в этой топологии, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывно каждое из отображений $f_\iota \circ g$. Если все F_ι локально выпуклы и топология в F_ι определяется семейством Γ_ι полунорм ($\iota\in I$), то топология пространства E локально выпукла и определяется полунормами $p_\iota \circ f_\iota$, где $p_\iota\in\Gamma_\iota$.

14. Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство *локально выпуклых* пространств и g_ι для каждого $\iota\in I$ — линейное отображение пространства F_ι в векторное пространство E. Среди всех локально выпуклых топологий в E, при которых все g_ι непрерывны, имеется *сильнейшая*. Для того чтобы линейное отображение h пространства E, наделенного этой топологией, в локально выпуклое пространство G было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывно каждое из отображений $h \circ g_\iota$.

15. Пусть E — векторное пространство, $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство его векторных подпространств, фильтрующееся по включению $\subset$, и каждое E_ι наделено локально выпуклой топологией $\mathfrak{T}_\iota$, причем если $E_\iota \subset E_\varkappa$, то $\mathfrak{T}_\iota$ мажорирует топологию, индуцируемую в E_ι топологией $\mathfrak{T}_\varkappa$. Сильнейшая из локально выпуклых топологий в E, при которых непрерывны канонические вложения всех E_ι в E, есть также сильнейшая из локально выпуклых топологий, индуцирующих в каждом E_ι топологию, мажорируемую топологией $\mathfrak{T}_\iota$; эта топология называется *индуктивным пределом* топологий $\mathfrak{T}_\iota$. Для того чтобы линейное отображение h пространства E, наделенного этой топологией, в локально выпуклое пространство было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывно в топологии $\mathfrak{T}_\iota$ его сужение на каждое E_ι.

Выпуклые множества в E, пересечение которых с каждым E_ι является окрестностью нуля в топологии $\mathfrak{T}_\iota$, образуют фундаменталь-

ную систему окрестностей нуля для индуктивного предела этих топологий $\mathfrak{T}_\iota$.

16. Пусть (E_n) — возрастающая последовательность векторных подпространств векторного пространства E, образующая покрытие этого пространства, и $\mathfrak{T}_n$ для каждого n — локально выпуклая топология в E_n, причем $\mathfrak{T}_n$ совпадает для каждого n с топологией, индуцируемой в E_n топологией $\mathfrak{T}_{n+1}$. Тогда индуктивный предел $\mathfrak{T}$ топологий $\mathfrak{T}_n$ индуцирует в каждом E_n топологию $\mathfrak{T}_n$; если все $\mathfrak{T}_n$ отделимы, то и их индуктивный предел $\mathfrak{T}$ отделим. E, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, называется *строгим индуктивным пределом* пространств E_n. Предположим, кроме того, что каждое из E_n замкнуто в E_{n+1} (в топологии $\mathfrak{T}_{n+1}$); тогда E_n замкнуто в E (в топологии $\mathfrak{T}$) и для того, чтобы множество в E было ограниченным (в $\mathfrak{T}$), необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в одном из E_n и было ограниченно в $\mathfrak{T}_n$ (гл. III, § 2, предложение 6).

17. Пусть E — векторное пространство, являющееся (алгебраической) прямой суммой семейства $(M_\iota)_{\iota\in I}$ своих векторных подпространств. Предположим, что каждое M_ι наделено локально выпуклой топологией. Для каждого конечного множества $H \subset I$ наделим пространство $M_H = \sum_{\iota\in H} M_\iota$ топологией, являющейся произведением топологий пространств M_ι $(\iota \in H)$. Пусть $\mathfrak{T}$ — топология в E, являющаяся индуктивным пределом топологий пространств M_H, где H пробегает множество всех конечных подмножеств из I. Пространство H, наделенное топологией $\mathfrak{T}$, называется *топологической прямой суммой* подпространств M_ι; если каждое из M_ι отделимо, то и E отделимо. Пусть $F_J = \sum_{\iota\in J} M_\iota$, где J — произвольное подмножество из I; наделенное топологией, индуцированной из F, F_J совпадает с топологической прямой суммой семейства $(M_\iota)_{\iota\in J}$. E совпадает с топологической прямой суммой семейства $\left(F_{J_\lambda}\right)_{\lambda\in L}$ для любого разбиения $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ множества I.

Гильбертова сумма гильбертовых пространств

18. Пусть $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство гильбертовых пространств и F — (алгебраическая) прямая сумма этого семейства векторных пространств. Для каждых двух элементов $x = \sum_{\iota\in I} x_\iota$ и $y = \sum_{\iota\in I} y_\iota$ пространства F положим $(x\,|\,y) = \sum_{\iota\in I} (x_\iota\,|\,y_\iota)$; $(x\,|\,y)$ есть эрмитова полуторалинейная

форма, превращающая F в отделимое предгильбертово пространство. Его пополнение E есть гильбертово пространство, называемое *внешней гильбертовой суммой* гильбертовых пространств E_ι. E можно отождествить с подпространством произведения $\prod_{\iota\in I} E_\iota$, образованным теми $x=(x_\iota)$, для которых $\sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|^2<+\infty$, причем скалярное произведение $(x\,|\,y)$ на E будет равно $\sum_{\iota\in I}(x_\iota\,|\,y_\iota)$. Если I конечно, то E есть также топологическая прямая сумма пространств E_ι.

19. Пусть E — гильбертово пространство и $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство его замкнутых векторных подпространств такое, что E_ι и $E_\varkappa$ при $\iota\neq\varkappa$ ортогональны. Тогда замкнутое векторное подпространство в E, порожденное всеми E_ι, изоморфно внешней гильбертовой сумме пространств E_ι. Если, в частности, это подпространство совпадает с E, то E называется *гильбертовой суммой* своих подпространств E_ι. Если $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ — семейство гильбертовых пространств, F — их внешняя гильбертова сумма и каждое F_λ рассматривается как подпространство в F, то F есть также гильбертова сумма этих подпространств F_λ.

§ 4. Выпуклость

Все понятия, связанные с выпуклостью, относятся к структуре векторного пространства *над* $\mathbf{R}$. Под „гиперплоскостью" всюду в этом параграфе понимается (вещественная) *аффинная* гиперплоскость, тем самым не обязательно содержащая начало.

Выпуклые множества

1. Множество A в векторном пространстве E называется *выпуклым*, если вместе с каждыми своими двумя элементами x, y это множество содержит и весь соединяющий их отрезок, иными словами, если $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$, когда $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Выпуклое множество A содержит центр тяжести любого конечного набора своих точек, снабженных положительными массами (т. е. каждую линейную комбинацию $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$, где $x_\iota\in A$, $\lambda_\iota\geqslant 0$ для всех $\iota\in I$, $\lambda_\iota\neq 0$ лишь для конечного числа индексов ι и $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota=1$).

2. Образ и прообраз выпуклого множества при аффинном линейном отображении выпуклы. Произведение и пересечение выпуклых множеств выпуклы. Если A и B — выпуклые множества в E, то $\alpha A+\beta B$

выпукло для любой пары скаляров (α, β). Линейное многообразие выпукло; параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ — выпуклый; если p — полунорма на E, то множество тех $x \in E$, для которых $p(x) \leqslant r$ (соотв. $p(x) < r$), выпукло при каждом $r \geqslant 0$.

3. В топологическом векторном пространстве замыкание выпуклого множества выпукло; внутренность $\mathring{A}$ выпуклого множества A выпукла; если $\mathring{A} \neq \varnothing$, то $\mathring{A} = \overline{\mathring{A}}$ и $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$.

Замкнутое множество с непустой внутренностью называется *выпуклым телом*.

4. *Выпуклой оболочкой* множества $A \subset E$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее A; это — множество центров тяжести всевозможных конечных наборов точек из A, снабженных положительными массами.

5. В топологическом векторном пространстве E *замкнутой выпуклой оболочкой* множества A называется замыкание его выпуклой оболочки; это — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее A. Если E локально выпукло, то замкнутая выпуклая оболочка множества A есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств (гл. II, § 3, следствие 1 предложения 4).

6. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — локально выпуклые топологии в E; если непрерывные линейные формы при обеих этих топологиях одни и те же, то и замкнутые множества одни и те же (гл. IV, § 2, предложение 4).

Это имеет место, в частности, когда $\mathcal{T}'$ — ослабленная топология, ассоциированная с топологией $\mathcal{T}$.

Отделение выпуклых множеств

7. Пусть E — топологическое векторное пространство, $A \subset E$ — выпуклое множество и V — линейное многообразие в E, не пересекающееся с A; для существования замкнутой гиперплоскости H, содержащей V и не пересекающейся с A, достаточно выполнения любого из следующих двух условий:

а) A открыто (теорема Хана — Банаха (геометрическая форма); гл. II, § 3, теорема 1).

б) E локально выпукло, A компактно и V замкнуто (гл. II, § 3, предложение 4).

8. Говорят, что множества A и B в топологическом векторном пространстве E *отделяются* (соотв. *строго отделяются*) замкнутой (вещественной) гиперплоскостью H, если A содержится в одном

из определяемых ею замкнутых (соотв. открытых) полупространств, а B — в другом.

Пусть A и B — непустые выпуклые множества в топологическом векторном пространстве E, причем A открыто и $A \cap B = \varnothing$. Существует замкнутая гиперплоскость, отделяющая A и B (гл. II, § 3, предложение 1).

Пусть A и B — непустые замкнутые выпуклые множества в локально выпуклом пространстве E, причем A компактно и $A \cap B = \varnothing$. Существует замкнутая гиперплоскость, строго отделяющая A и B (гл. II, § 3, предложение 4).

9. В локально выпуклом пространстве каждое замкнутое выпуклое множество есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств. Каждое замкнутое линейное многообразие есть пересечение содержащих его замкнутых гиперплоскостей.

10. *Опорной гиперплоскостью* к множеству A в векторном пространстве E называется каждая гиперплоскость H такая, что $H \cap A \neq \varnothing$ и A целиком находится по одну сторону от H.

В топологическом (соотв. локально выпуклом) векторном пространстве каждое выпуклое тело A (соотв. каждое непустое компактное выпуклое множество A) есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств, определяемых опорными гиперплоскостями к A (гл. II, § 3, следствие предложения 3 и следствие 2 предложения 4).

Компактные выпуклые множества

11. В отделимом топологическом векторном пространстве E выпуклая оболочка объединения конечного числа выпуклых компактных множеств компактна. Если E — отделимое локально выпуклое пространство, то выпуклая оболочка предкомпактного множества из E предкомпактна; если, кроме того, E квазиполно, то замкнутая выпуклая оболочка предкомпактного множества компактна.

12. Пусть A — непустое компактное множество и H — замкнутая гиперплоскость в отделимом топологическом векторном пространстве E. Соответственно тому, содержится ли A в гиперплоскости, параллельной H, или нет, A обладает одной или двумя опорными гиперплоскостями, параллельными H.

13. Точка x выпуклого множества A называется его *экстремальной* точкой, если в A нет ни одного открытого интервала, со-

держащего x. Пусть A — компактное выпуклое множество в отделимом локально выпуклом пространстве. Каждая опорная гиперплоскость множества A содержит его экстремальную точку, и A есть замкнутая выпуклая оболочка множества F всех своих экстремальных точек (теорема Крейна — Мильмана; гл. II, § 4, теорема 1); обратно, каждое компактное подмножество в A, имеющее A своей замкнутой выпуклой оболочкой, содержит F (гл. II, § 4, предложение 4).

Проекция на выпуклое множество в предгильбертовом пространстве

14. Пусть E — предгильбертово пространство, A — непустое полное отделимое выпуклое множество в E и $x \in E$. Существует однозначно определенная точка $y \in A$, называемая *проекцией x на A*, расстояние которой от x равно расстоянию x от A. Эта точка характеризуется также выполнением неравенства $\Re(x-y \mid z-y) \leqslant 0$ для всех $z \in A$ (гл. V, § 1, теорема 1).

При заданном A проекция x на A есть непрерывная функция от x.

15. Пусть Φ — фильтрующееся по включению $\supset$ (соотв. $\subset$) множество, образованное непустыми полными отделимыми выпуклыми подмножествами предгильбертова пространства E, и M — пересечение всех множеств $A \in \Phi$, предполагаемое непустым (соотв. замкнутая выпуклая оболочка объединения всех множеств A, предполагаемая отделимой и полной). Проекция каждого $x \in E$ на $A \in \Phi$ стремится по фильтру сечений множества Φ к проекции x на M.

Выпуклые функции

16. Числовая функция f, определенная на выпуклом подмножестве A векторного пространства E, называется *выпуклой* (соотв. *строго выпуклой*), если выполнены следующие равносильные условия:

а) Для каждой прямой D в E сужение f на отрезок $D \cap A$ есть выпуклая (соотв. строго выпуклая) функция вещественного переменного.

б) Если $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ и $0 < \lambda < 1$, то

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(соотв. $f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$).

в) Каковы бы ни были точки x и y в A, все точки открытого интервала M_xM_y (где M_t означает точку $(t, f(t))$ произведения $E \times \mathbf{R}$) находятся под (соотв. строго под) графиком функции f.

Если f выпукла (соотв. строго выпукла) и g — центр тяжести попарно различных точек $x_i \in A$, снабженных массами $\lambda_i > 0$, то точка M_g находится под (соотв. строго под) центром тяжести точек M_{x_i}, снабженных теми же массами λ_i.

Полунорма есть выпуклая функция.

17. Пусть f — выпуклая функция, определенная на открытом выпуклом подмножестве A топологического векторного пространства. Если f ограниченна сверху на некотором непустом открытом подмножестве множества A, то f непрерывна на всем A.

Конусы

18. Множество C в векторном пространстве E называется *конусом с вершиной в начале*, если оно устойчиво относительно всех гомотетий с положительными коэффициентами. $x + C$ для каждого $x \in E$ называется *конусом с вершиной* x.

Конус с вершиной 0 называется *заостренным*, если $0 \in C$, *затупленным*, если $0 \notin C$, и *выступающим*, если он не содержит никакой прямой, проходящей через 0.

19. Для того чтобы множество $C \subset E$ было выпуклым конусом с вершиной 0, необходимо и достаточно, чтобы $C + C \subset C$ и $\lambda C \subset C$ для всех $\lambda > 0$; порождаемое им векторное подпространство есть тогда $C - C$; наибольшее векторное подпространство, содержащееся в C, есть $C \cap (-C)$.

Пересечение выпуклых конусов с общей вершиной есть выпуклый конус; образ выпуклого конуса при аффинном линейном отображении есть выпуклый конус.

20. Пусть P — выступающий заостренный выпуклый конус с вершиной 0 в векторном пространстве E. Отношение $y - x \in P$ есть отношение порядка в E; обозначим его $x \leqslant y$. Оно обладает следующими свойствами:

$(\mathrm{EO_I})$ *если* $x \leqslant y$, *то* $x + z \leqslant y + z$ *для всех* $z \in E$;

$(\mathrm{EO_{II}})$ *если* $x \geqslant 0$, *то* $\lambda x \geqslant 0$ *для каждого скаляра* $\lambda \geqslant 0$.

Обратно, если E наделено структурой порядка, обладающей свойствами $(\mathrm{EO_I})$ и $(\mathrm{EO_{II}})$, то множество P всех элементов $\geqslant 0$ из

E есть выступающий заостренный выпуклый конус с вершиной 0; E, наделенное своими структурами векторного пространства и порядка, называется тогда *упорядоченным векторным пространством.*

21. Пусть P — выпуклый конус с вершиной 0; полупрямая D с началом 0, содержащаяся в этом конусе, называется его *экстремальной образующей*, если каждый открытый интервал, содержащийся в P и пересекающийся с D, содержится в D; для этого необходимо и достаточно, чтобы из $x+y\in D$, $x\in P$, $y\in P$ следовало $x\in D$ и $y\in D$.

22. В топологическом векторном пространстве внутренность и замыкание выпуклого конуса с вершиной 0 являются выпуклыми конусами с вершиной 0.

23. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и P — выступающий заостренный выпуклый конус в E, имеющий непустую внутренность. Каждая линейная форма на E, положительная на P, непрерывна. Если M — векторное подпространство в E, пересекающееся с внутренностью конуса P, и f — линейная форма на M, положительная на $P\cap M$, то на E существует линейная форма $\tilde{f}$, продолжающая f и положительная на P (гл. II, § 3, предложение 6).

§ 5. Пространства непрерывных линейных отображений

В этом параграфе E и F — локально выпуклые пространства, $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E и $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F.

Если F — тело скаляров пространства E, то $L(E, F)$ называется *топологическим сопряженным* (или просто *сопряженным*) к E и обозначается E'.

$\mathfrak{S}$-топологии в $L(E, F)$

1. $\mathfrak{S}$-топологией в пространстве $L(E, F)$ всех непрерывных линейных отображений E в F называется топология равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$; эта топология согласуется со структурой векторного пространства в $L(E, F)$ и локально выпукла. Пространство $L(E, F)$, наделенное $\mathfrak{S}$-топологией, обозначается $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

Если объединение множеств из $\mathfrak{S}$ тотально в E, а F отделимо, то $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ отделимо.

2. Наиболее важны следующие $\mathfrak{S}$-топологии:

а) $\mathfrak{S}$ — множество всех конечных подмножеств пространства E; такая $\mathfrak{S}$-топология называется *топологией простой сходимости* (или *слабой* топологией, в случае сопряженного пространства E').

б) $\mathfrak{S}$ — множество всех компактных подмножеств пространства E; такая $\mathfrak{S}$-топология называется *топологией компактной сходимости*.

в) $\mathfrak{S}$ — множество всех ограниченных подмножеств пространства E; такая $\mathfrak{S}$-топология называется *топологией ограниченной сходимости* (или *сильной* топологией в случае сопряженного пространства E').

Каждая из этих топологий мажорируется следующей.

3. Пусть Γ — множество полунорм, определяющее топологию в F. Для каждого $u \in L(E, F)$, $M \in \mathfrak{S}$ и $p \in \Gamma$ положим $p_M(u) = \sup_{x \in M} p(u(x))$. Функции p_M образуют семейство полунорм, определяющих топологию пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$. В частности, если E и F — нормированные пространства, то норма $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ определяет в $L(E, F)$ топологию ограниченной сходимости.

4. $\mathfrak{S}$-топология не изменяется при замене $\mathfrak{S}$ множеством образов всех множеств из $\mathfrak{S}$ при всевозможных гомотетиях, или множеством объединений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{S}$, или множеством замкнутых уравновешенных выпуклых оболочек всех множеств из $\mathfrak{S}$.

5. Предположим, что E и F отделимы, причем F полно; пусть $\hat{E}$ — пополнение пространства E и $\hat{\mathfrak{S}}$ — множество замыканий в $\hat{E}$ всех множеств из $\mathfrak{S}$. Относя каждому элементу из $L(E, F)$ его продолжение по непрерывности на $\hat{E}$, получаем изоморфизм топологического векторного пространства $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ на топологическое векторное пространство $L_{\hat{\mathfrak{S}}}(\hat{E}, F)$.

6. Если E бочечно, F квазиполно и $\mathfrak{S}$ покрывает E, то $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ квазиполно (гл. III, § 3, теорема 4).

Ограниченные множества в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$

7. Для того чтобы множество H в $L(E, F)$ было ограниченным в $\mathfrak{S}$-топологии, необходимо и достаточно, чтобы множество точек $u(x)$ ($u \in H$, $x \in M$) было ограниченно в F для каждого $M \in \mathfrak{S}$.

8. Если E и F отделимы и $\mathfrak{B}$ — множество всех полных уравновешенных ограниченных выпуклых подмножеств пространства E, то

каждое множество из $L(E, F)$, ограниченное в топологии простой сходимости, ограниченно и в $\mathfrak{S}$-топологии (гл. III, § 3, теорема 1).

9. Если E квазиполно или бочечно, а $\mathfrak{S}$ покрывает E, то ограниченные множества в $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ — одни и те же для всех $\mathfrak{S}$-топологий (гл. III, § 3, следствие 1 теоремы 1 и теорема 2).

Равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$

10. Пусть H — множество в $L(E, F)$. Следующие свойства равносильны:

а) H равностепенно непрерывно в точке 0 пространства E.

б) H равностепенно непрерывно в каждой точке пространства E.

в) H равномерно равностепенно непрерывно на E.

г) Для каждой окрестности нуля V из F существует окрестность нуля U в E такая, что $u(x) \in V$ для всех $x \in U$ и $u \in H$.

Условие б) означает, что H равностепенно непрерывно на E.

11. Предположим F отделимым и пусть H — равностепенно непрерывное множество в $L(E, F)$. Тогда множество всех пределов отображений $u \in H$ в топологии простой сходимости есть равностепенно непрерывное множество в $L(E, F)$ (гл. III, § 3, предложение 4). В H совпадают следующие равномерные структуры: 1) простой сходимости на тотальном подмножестве пространства E; 2) простой сходимости на E; 3) равномерной сходимости на всех предкомпактных множествах из E (гл. III, § 3, предложение 5).

12. Все равностепенно непрерывные множества в $L(E, F)$ ограниченны в каждой $\mathfrak{S}$-топологии. Обратно, если E бочечно и $\mathfrak{S}$ покрывает E, то каждое множество в $L(E, F)$, ограниченное в $\mathfrak{S}$-топологии, равностепенно непрерывно. Если, кроме того, F отделимо и фильтр Φ в $L(E, F)$, ограниченный или обладающий счетным базисом, просто сходится к отображению u_0 пространства E в F, то u_0 есть непрерывное линейное отображение и Φ сходится к u_0 равномерно на каждом предкомпактном множестве из E (теорема Банаха — Штейнгауза; гл. III, § 3, теорема 2).

13. Предположим, что F отделимо и квазиполно, а $\mathfrak{S}$ покрывает E. Тогда каждое равностепенно непрерывное множество из $L(E, F)$, замкнутое в $\mathfrak{S}$-топологии, полно в этой $\mathfrak{S}$-топологии (гл. III, § 3, теорема 4).

14. Для того чтобы равностепенно непрерывное множество H в $L(E, F)$ было относительно компактным в топологии простой схо-

димости, необходимо и достаточно, чтобы множество точек $u(x)$ $(u \in H)$ было относительно компактно в F для каждого $x \in E$ (гл. III, § 3, следствие предложения 4).

§ 6. Двойственность

Векторные пространства в двойственности

1. Пусть B — билинейная форма на произведении векторных пространств F и G. Мы говорим, что B *приводит* F *и* G *в двойственность*, если выполнены следующие два условия:

(D_I) *Для каждого* $x \neq 0$ *из* F *существует* $y \in G$ *такое, что* $B(x, y) \neq 0$.

(D_{II}) *Для каждого* $y \neq 0$ *из* G *существует* $x \in F$ *такое, что* $B(x, y) \neq 0$.

Относя каждому элементу $y \in G$ линейную форму $x \to B(x, y)$ на F, мы получаем изоморфизм пространства G в алгебраическое сопряженное F^* к F; если отождествить G с его образом при этом изоморфизме, то форма $B(x, y)$ отождествится с канонической билинейной формой $\langle x, y\rangle$. Таким же образом F может быть отождествлено с некоторым подпространством пространства G^*.

2. Топология простой сходимости на G определяет в F (рассматриваемом как часть G^*) топологию, обозначаемую $\sigma(F, G)$ и называемую *слабой топологией*, определяемой заданной двойственностью. Эта топология локально выпукла и отделима; она определяется семейством полунорм $x \to |\langle x, y\rangle|$, где y пробегает G; это — слабейшая из топологий, при которых непрерывны все линейные формы $x \to \langle x, y\rangle$ $(y \in G)$. Обратно, каждая линейная форма на F, непрерывная в топологии $\sigma(F, G)$, имеет вид $x \to \langle x, y\rangle$, где $y \in G$. Таким образом, топологическое сопряженное к F (множество всех непрерывных линейных форм на F, наделенном топологией $\sigma(F, G)$) отождествимо с G.

Поменяв ролями F и G, определим топологию $\sigma(G, F)$ в G; сопряженное к G (наделенному топологией $\sigma(G, F)$) отождествимо с F.

3. Обратно, пусть E — топологическое векторное пространство с отделимой локально выпуклой топологией $\mathcal{T}$ и E' — топологическое сопряженное к E. Каноническая билинейная форма $\langle x, x'\rangle$ приводит E и E' в двойственность (гл. II, § 5, следствие 2 теоремы 1); со-

ответствующая топология $\sigma(E, E')$ мажорируется топологией $\mathfrak{T}$ и называется *ослабленной топологией*, ассоциированной с $\mathfrak{T}$; топология $\sigma(E', E)$ называется *слабой топологией* в E'.

Поляры.

4. Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. *Полярой* множества $M \subset F$ называется множество M° всех $y \in G$ таких, что $\Re\langle x, y\rangle \leqslant 1$ для каждого $x \in M$. Множество M° содержит 0, выпукло и слабо замкнуто (т. е. замкнуто в топологии $\sigma(G, F)$). Если M уравновешенно, то M° уравновешенно и состоит из всех $y \in G$ таких, что $|\langle x, y\rangle| \leqslant 1$ для каждого $x \in M$. Если $M \subset N$, то $M^\circ \supset N^\circ$, и если M поглощает N, то N° поглощает M°. Поляра объединения $\bigcup_\iota M_\iota$ любого семейства (M_ι) множеств из F есть пересечение $\bigcap_\iota M_\iota^\circ$; если все M_ι выпуклы, слабо замкнуты и содержат 0, то поляра пересечения $\bigcap_\iota M_\iota$ есть замкнутая (в топологии $\sigma(G, F)$) выпуклая оболочка объединения $\bigcup_\iota M_\iota^\circ$.

5. Пусть $M \subset F$; $M^{\circ\circ}$ обозначает поляру множества M°; это — замкнутая (в топологии $\sigma(F, G)$) выпуклая оболочка объединения множества M и точки 0; $M^{\circ\circ\circ} = M^\circ$. Таким образом, полярность приводит во взаимно однозначное соответствие слабо замкнутые выпуклые множества из F и G, содержащие начало. Для того чтобы множество $M \subset F$ было ограниченным в топологии $\sigma(F, G)$, необходимо и достаточно, чтобы M° было бочкой в топологии $\sigma(G, F)$.

Подпространства, факторпространства, произведения

6. Если M — векторное подпространство в F, то его поляра M° есть слабо замкнутое векторное подпространство в G, называемое *ортогональным* к M; это — множество всех $y \in G$ таких, что $\langle x, y\rangle = 0$ для каждого $x \in M$. $M^{\circ\circ}$ есть слабое замыкание векторного подпространства M.

7. Пусть M — векторное подпространство в F. Билинейная форма $\langle x, y\rangle$ приводит в двойственность M и G/M°. $\sigma(M, G/M^\circ)$ есть топология, индуцируемая в M топологией $\sigma(F, G)$. Если M слабо замкнуто, то $\sigma(G/M^\circ, M)$ есть фактортопология топологии $\sigma(G, F)$ по M° (гл. IV, § 1, предложение 7).

8. Пусть $((F_\iota, G_\iota))_{\iota \in I}$ — семейство пар векторных пространств (F_ι, G_ι), приведенных в двойственность билинейными формами $B_\iota(x_\iota, y_\iota)$. Тогда прямая сумма F пространств F_ι и произведение G пространств G_ι приводятся в двойственность билинейной формой $B((x_\iota), (y_\iota)) = \sum_{\iota \in I} B_\iota(x_\iota, y_\iota)$; топология $\sigma(G, F)$ совпадает с произведением топологий $\sigma(G_\iota, F_\iota)$.

Топологии, согласующиеся с двойственностью

9. Пусть F и G — векторные пространства в двойственности. Говорят, что отделимая локально выпуклая топология $\mathcal{T}$ в F *согласуется с двойственностью между* F *и* G, если линейные формы на F, непрерывные в топологии $\mathcal{T}$, это формы вида $x \to \langle x, y \rangle$, где $y \in G$; то же можно выразить, сказав, что сопряженным к F, наделенному топологией $\mathcal{T}$, служит G, или также что $\sigma(F, G)$ есть ослабленная топология, ассоциированная с $\mathcal{T}$.

10. В F ограниченные (соотв. замкнутые выпуклые) множества — одни и те же для всех топологий, согласующихся с двойственностью между F и G (гл. IV, § 2, теорема 3 и предложение 4).

11. Для отделимой локально выпуклой топологии $\mathcal{T}$ в F следующие три свойства равносильны (теорема Макки; гл. IV, § 2, теорема 2):

а) $\mathcal{T}$ согласуется с двойственностью между F и G;

б) $\mathcal{T}$ мажорирует топологию $\sigma(F, G)$ и мажорируется топологией $\tau(F, G)$ равномерной сходимости на всех слабо компактных уравновешенных выпуклых множествах из G;

в) $\mathcal{T}$ есть топология равномерной сходимости на элементах некоторого покрытия пространства G, образованного слабо компактными уравновешенными выпуклыми множествами.

Топология $\tau(F, G)$ называется *топологией Макки* в F; это — сильнейшая из локально выпуклых топологий в F, согласующихся с двойственностью между F и G. В F топология метризуемого или бочечного локально выпуклого пространства, согласующаяся с двойственностью между F и G, необходимо совпадает с $\tau(F, G)$; однако, для пары пространств в двойственности F, G топология $\tau(F, G)$ не обязательно бочечна или метризуема.

12. Пусть $\mathcal{T}$ — топология в F, согласующаяся с двойственностью между F и G. Для того чтобы множество $N \subset G$ было равностепенно

непрерывным (при топологии $\mathcal{T}$ в F), необходимо и достаточно, чтобы N° было окрестностью нуля для топологии $\mathcal{T}$ в F; такое множество N слабо относительно компактно в G; $\mathcal{T}$ совпадает с $\mathfrak{S}$-топологией, где $\mathfrak{S}$ — множество всех таких N (см. п° 11).

Предположим, кроме того, что F, наделенное топологией $\mathcal{T}$, полно. Для того чтобы линейная форма на G была слабо непрерывной (иначе говоря, записывалась в виде $y \to \langle x, y\rangle$, где $x \in F$), достаточно, чтобы были слабо непрерывны ее сужения на множества из $\mathfrak{S}$ (гл. IV, § 2, теорема 4).

Сильное сопряженное

13. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное. *Сильной топологией* в E' называется топология равномерной сходимости на всех ограниченных множествах из E. Векторное пространство E', наделенное этой топологией, называется *сильным сопряженным* к E. Поляры всех ограниченных множеств из E образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для сильной топологии в E'. Эта топология зависит лишь от двойственности между E и E'.

14. Каждое равностепенно непрерывное множество из E' сильно ограниченно, и каждое сильно ограниченное множество слабо ограниченно. Обратно, если E квазиполно, то каждое слабо ограниченное множество из E' сильно ограниченно (гл. IV, § 3, предложение 1); если E бочечно, то каждое слабо ограниченное множество из E' сильно ограниченно и равностепенно непрерывно (гл. IV, § 3, предложение 2).

15. Сопряженное к сильному сопряженному E' к E называют *вторым сопряженным* к E и обозначают E''. $x' \to \langle x, x'\rangle$ для каждого $x \in E$ есть непрерывная линейная форма на E' и тем самым некоторый элемент $j(x)$ из E''. Отображение j пространства E в E'' взаимно однозначно и линейно, но не обязательно непрерывно. Для того чтобы j отображало E на E'', необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное множество из E было относительно компактно в топологии $\sigma(E, E')$ (гл. IV, § 3, теорема 1); E называется тогда *полурефлексивным*. Предположим, что это условие выполнено; для того чтобы j было изоморфизмом топологического векторного пространства E на векторное пространство E'', наделенное сильной топологией (как пространство, сопряженное к сильному

сопряженному E'), необходимо и достаточно, чтобы E было бочечно (гл. IV, § 3, теорема 2); E называется тогда *рефлексивным*. Сильное сопряженное к рефлексивному пространству рефлексивно.

Сопряженное отображение

16. Пусть (F, G) и (F_1, G_1) — две пары пространств в двойственности и u — линейное отображение F в F_1. Для того чтобы существовало линейное отображение v пространства G_1 в G такое, что

$$\langle u(y), z_1\rangle = \langle y, v(z_1)\rangle,$$

каковы бы ни были $y \in F$ и $z_1 \in G_1$, необходимо и достаточно, чтобы u было слабо непрерывно (т. е. непрерывно при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$). Отображение v тогда единственно и является слабо непрерывным (при топологиях $\sigma(G_1, F_1)$ и $\sigma(G, F)$) линейным отображением; оно называется *сопряженным* к u и обозначается ${}^t u$. Имеем ${}^t({}^t u) = u$.

17. Ядро отображения ${}^t u$ ортогонально к $u(F)$. Для того чтобы $u(F)$ было слабо плотным в F_1, необходимо и достаточно, чтобы ${}^t u$ было взаимно однозначно.

Для того чтобы u было гомоморфизмом F в F_1 (при топологиях $\sigma(F, G)$ и $\sigma(F_1, G_1)$), необходимо и достаточно, чтобы ${}^t u(G_1)$ было слабо замкнуто в G (гл. IV, § 4, предложение 4).

18. Пусть E и F — отделимые локально выпуклые пространства и u — линейное отображение E в F. Если u слабо непрерывно, то ${}^t u$ определено и отображает F' в E'; оно непрерывно, если наделить F' и E' одновременно слабой или сильной топологиями.

Если u непрерывно при заданных исходных топологиях в E и F, то оно слабо непрерывно. Обратно, если u слабо непрерывно, то оно непрерывно при топологиях Макки $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$; в частности, если E бочечно или метризуемо, то u непрерывно при заданных исходных топологиях в E и F.

§ 7. Основные типы локально выпуклых пространств

Бочечные пространства

1. *Бочкой* в локально выпуклом пространстве E называется каждое поглощающее замкнутое уравновешенное выпуклое множество. Бочка поглощает все полные ограниченные выпуклые множества

(гл. III, § 3, лемма 1). Если E квазиполно, то бочка поглощает все ограниченные множества из E.

2. Топологическое векторное пространство E называется *бочечным*, если оно локально выпукло и каждая бочка в нем является окрестностью нуля. Локально выпуклое пространство, базисное топологическое пространство которого — бэровское (Общ. топ., Рез., § 1, п° 17; гл. IX, § 5, п° 3), бочечно (гл. III, § 1, предложение 1); в частности, пространства Фреше, а тем самым и банаховские пространства бочечны. Монтелевское пространство бочечно по определению. Факторпространство, топологическая прямая сумма и индуктивный предел бочечных пространств бочечны.

3. Пусть E — бочечное пространство и F — локально выпуклое пространство. Ограниченные множества в $L(E, F)$ — одни и те же для всех $\mathfrak{S}$-топологий, где объединением множеств из $\mathfrak{S}$ служит всё E; они совпадают с равностепенно непрерывными множествами в $L(E, F)$ (гл. III, § 3, теорема 2).

Если F отделимо и Φ — ограниченный или обладающий счетным базисом фильтр в $L(E, F)$, просто сходящийся к некоторому отображению u_0 пространства E в F, то u_0 есть непрерывное линейное отображение и Φ сходится к u_0 равномерно на каждом предкомпактном множестве из E (теорема Банаха — Штейнгауза; гл. III, § 3, следствие теоремы 2).

Если, кроме того, F квазиполно и $\mathfrak{S}$ покрывает E, то $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ квазиполно (гл. III, § 3, следствие 2 теоремы 4).

4. Пусть E — отделимое бочечное пространство и E' — его сопряженное. Следующие свойства множества $M' \subset E'$ равносильны (гл. IV, § 3, предложение 2):

а) M' слабо ограниченно.

б) M' сильно ограниченно.

в) M' относительно слабо компактно.

г) M' равностепенно непрерывно.

Пространство E' квазиполно как в сильной, так и в слабой топологии. В E', наделенном слабой топологией, замкнутая выпуклая оболочка компактного множества компактна.

5. Если E — отделимое бочечное пространство, то его топология совпадает с топологией Макки $\tau(E, E')$. Поляры окрестностей нуля из E (соотв. из сильного сопряженного E') образуют фундаментальную систему ограниченных множеств в сильном сопряженном E'

(соотв. в E). Обратно, поляры ограниченных множеств из E (соотв. из сильного сопряженного E') образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в сильном сопряженном E' (соотв. в E).

6. Пусть E, F, G — топологические векторные пространства. Если F бочечно, то каждое раздельно непрерывное билинейное отображение u произведения $E \times F$ в G $\mathfrak{S}$-гипонепрерывно для любого покрытия $\mathfrak{S}$ пространства E ограниченными множествами (гл. III, § 4, предложение 6). Если, кроме того, E и F метризуемы, то u непрерывно (гл. III, § 4, предложение 2).

Монтелевские пространства

7. *Монтелевским пространством* называется каждое отделимое бочечное пространство, в котором все ограниченные множества относительно компактны. Нормированное монтелевское пространство конечномерно (гл. I, § 2, теорема 3).

8. В ограниченном подмножестве монтелевского пространства ослабленная топология совпадает с первоначально заданной. Каждый ограниченный фильтр или фильтр со счетным базисом, сходящийся в ослабленной топологии, сходится и в первоначально заданной топологии.

Следующие свойства подмножества P монтелевского пространства равносильны:

а) P ограниченно.

б) P относительно компактно.

в) P ограниченно в ослабленной топологии.

г) P относительно компактно в ослабленной топологии.

9. Каждое монтелевское пространство рефлексивно. Сильное сопряженное к монтелевскому пространству есть монтелевское пространство (гл. IV, § 3, предложение 7).

Пространства Фреше

10. *Пространством Фреше* называется каждое полное метризуемое локально выпуклое пространство. Каждое замкнутое векторное подпространство пространства Фреше и каждое факторпространство пространства Фреше по его замкнутому векторному подпространству являются пространствами Фреше.

11. Так как пространство Фреше метризуемо и полно, то к нему применима теорема о замкнутом графике (см. § 2, п°п° 6 и 7; § 3, п° 8). В частности, пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — две топологии в одном и том же

векторном пространстве E, в каждой из которых E есть пространство Фреше; если $\mathfrak{T}_1$ мажорируется топологией $\mathfrak{T}_2$, то эти две топологии совпадают.

12. Пространство Фреше бочечно. Поэтому к нему применимы все свойства бочечных пространств и прежде всего теорема Банаха — Штейнгауза (п°п° 1—6). Если E — пространство Фреше и F — метризуемое топологическое векторное пространство, то каждое раздельно непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в топологическое векторное пространство G непрерывно (гл. III, § 4, предложение 2).

13. Пусть E — пространство Фреше и E' — его сопряженное. Для того чтобы выпуклое множество $A' \subset E'$ было замкнутым в слабой топологии $\sigma(E', E)$, необходимо и достаточно, чтобы $A' \cap U^\circ$ было замкнуто в топологии $\sigma(E', E)$ для каждой окрестности нуля U из E (гл. IV, § 2, теорема 5).

Банаховские пространства

14. *Банаховским пространством* называется каждое полное нормированное пространство. Каждое банаховское пространство есть пространство Фреше (п°п° 10—13). Пополнение нормированного пространства есть банаховское пространство.

15. Если E и F — банаховские пространства, то $L(E, F)$, наделенное нормой $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$, есть банаховское пространство, топология которого есть топология ограниченной сходимости.

Если H — множество в $L(E, F)$ такое, что $\sup_{u \in H} \|u(x)\| < +\infty$ для каждого $x \in E$, то $\sup_{u \in H} \|u\| < +\infty$, что означает, что H равностепенно непрерывно (теорема Банаха — Штейнгауза).

16. Пусть E — банаховское пространство и E' — его сопряженное. Снабженное нормой $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x, x' \rangle|$, E' есть банаховское пространство, топология которого является сильной топологией; иными словами, сильное сопряженное к банаховскому пространству есть банаховское пространство.

Каждый замкнутый шар в E' слабо компактен (гл. IV, § 5, предложение 1). Для того чтобы линейная форма f на E' была слабо непрерывной (и, значит, записывалась в виде $f(x') = \langle x, x' \rangle$, где $x \in E$), достаточно, чтобы было слабо непрерывно ее сужение на шар $\|x'\| \leqslant 1$ (гл. IV, § 5, следствие 1 предложения 3).

17. Второе сопряженное E'' к банаховскому пространству E, снабженное нормой $\|x''\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} |\langle x'', x' \rangle|$, есть банаховское пространство, причем каноническое отображение j пространства E в E'' есть изометрия. Для того чтобы E было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы шар $\|x\| \leqslant 1$ был компактен в ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ (гл. IV, § 5, предложение 6).

18. Замкнутое подпространство M банаховского пространства E и факторпространство E/M являются банаховскими пространствами. Пусть M° — подпространство в E', ортогональное к M. Каноническое отображение сопряженного к E/M на M° есть изометрия; каноническое отображение M на E'/M° есть изометрия.

Если E рефлексивно, то M и E/M рефлексивны.

19. Пусть E и F — банаховские пространства; каково бы ни было непрерывное линейное отображение u пространства E в F, $\|{}^t u\| = \|u\|$ и $\|u\|$ есть норма непрерывной билинейной формы $(x, y') \to \langle u(x), y' \rangle$ на $E \times F'$.

Гильбертово пространство

20. Пусть E — векторное пространство над телом вещественных или телом комплексных чисел (обозначаемым далее K). *Эрмитовой полуторалинейной формой* на E называется каждое отображение $(x, y) \to (x \mid y)$ произведения $E \times E$ в K, удовлетворяющее следующим условиям:

1° $(x \mid y)$ линейно по x и полулинейно по y;

2° $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$.

Если $(x \mid x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$, то форма $(x \mid y)$ называется *положительной*; если при этом $(x \mid x) = 0$ лишь при $x = 0$, то она называется *невырожденной положительной*.

21. Векторное пространство E, наделенное положительной эрмитовой полуторалинейной формой $(x \mid y)$, называется *предгильбертовым пространством*, а форма $(x \mid y)$ — *скалярным произведением* векторов x и y. $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ есть полунорма, превращающая E в локально выпуклое пространство.

Скалярное произведение удовлетворяет *неравенству Коши — Буняковского*

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

и потому непрерывно на $E \times E$.

Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы $(x \mid y)$ было невырожденной положительной формой; $\|x\|$ есть тогда норма, а E — нормированное пространство.

22. Полное отделимое предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством* или *пространством Гильберта*. Пополнение отделимого предгильбертова пространства есть гильбертово пространство. Каждое замкнутое векторное подпространство гильбертова пространства есть гильбертово пространство. K, наделенное скалярным произведением $(\xi \mid \eta) = \xi\overline{\eta}$, если гильбертово пространство. Каждая внешняя гильбертова сумма гильбертовых пространств есть гильбертово пространство. В частности, для любого множества I пространство $L^2_K(I)$ всех семейств $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$, для которых $\sum_\iota |\xi_\iota|^2 < +\infty$, наделенное скалярным произведением

$$((\xi_\iota) \mid (\eta_\iota)) = \sum_{\iota \in I} \xi_\iota \overline{\eta}_\iota,$$

есть гильбертово пространство.

23. Пусть E — гильбертово пространство и u_y для каждого $y \in E$ — линейная форма $x \to (x \mid y)$. $y \to u_y$ есть изометрическое полулинейное отображение пространства E на его сопряженное E'; поэтому гильбертово пространство можно отождествить с его сопряженным (гл. V, § 1, теорема 3).

Каждое гильбертово пространство E есть рефлексивное банаховское пространство. Единичный шар $\|x\| \leqslant 1$ пространства E слабо компактен. Для того чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ в E сильно сходился к x_0, необходимо и достаточно, чтобы он слабо сходился к x_0 и чтобы $\lim_{\mathfrak{F}} \|x\| = \|x_0\|$ (гл. V, § 1, предложение 9).

24. Пусть M — векторное подпространство гильбертова пространства E и M° — *ортогональное дополнение* к M, т. е. множество всех точек $y \in E$ таких, что $(x \mid y) = 0$ для каждого $x \in M$. $(\overline{M})^\circ = M^\circ$ и $(M^\circ)^\circ = \overline{M}$; M° есть замкнутое векторное подпространство в E, а E — гильбертова сумма своих подпространств $\overline{M}$ и M° (гл. V, § 1, теорема 2).

25. Семейство $(e_\iota)_{\iota \in I}$ элементов предгильбертова пространства E называется *ортонормальным*, если $(e_\iota \mid e_\varkappa) = \delta_{\iota\varkappa}$ (где $\delta_{\iota\varkappa}$ — кронекеровский символ); такое семейство топологически свободно. Для каждого $x \in E$

$$\sum_{\iota \in I} |(x \mid e_\iota)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

(*неравенство Бесселя*).

Следующие свойства ортонормального семейства (e_ι) в отделимом предгильбертовом пространстве E равносильны (гл. V, § 2, предложение 5):

а) Семейство (e_ι) тотально.

б) Для каждого $x \in E$ семейство $((x \mid e_\iota) e_\iota)$ суммируемо и имеет своей суммой x.

в) Для каждого $x \in E$ имеет место равенство $\|x\|^2 = \sum_{\iota \in I} |(x \mid e_\iota)|^2$.

Ортонормальное семейство (e_ι), удовлетворяющее этим условиям, называется *ортонормальным базисом* пространства E.

Если E — гильбертово пространство, то условия а), б), в) равносильны условию

г) Если $(x \mid e_\iota) = 0$ для всех $\iota \in I$, то $x = 0$.

Отображение $x \to ((x \mid e_\iota))$, где (e_ι) — ортонормальный базис гильбертова пространства E, есть изоморфизм последнего на пространство $L^2_K(I)$.

26. В каждом отделимом предгильбертовом пространстве счетного типа содержится счетный ортонормальный базис (гл. V, § 2, предложение 6).

27. В каждом гильбертовом пространстве существует ортонормальный базис, содержащий заданное ортонормальное семейство; каждое гильбертово пространство обладает поэтому хотя бы одним ортонормальным базисом (гл. V, § 2, теорема 2). Любые два ортонормальных базиса в одном и том же гильбертовом пространстве E равномощны (гл. V, § 2, предложение 7); их кардинальное число называется *гильбертовой размерностью* пространства E. Для того чтобы два гильбертовых пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую гильбертову размерность.

ПРИЛОЖЕНИЕ
К СВОДКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1. Пусть $\mathscr{D}_K$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbf{R}^n$, носитель которых содержится в компактном множестве K. Наделенное топологией равномерной сходимости каждой производной, $\mathscr{D}_K$ есть монтелевское пространство Фреше.

2. Объединение $\mathscr{D}$ всех $\mathscr{D}_K$ (где K пробегает множество всех компактных подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$), наделенное индуктивным пределом топологий пространств $\mathscr{D}_K$, есть строгий индуктивный предел пространств Фреше и монтелевское пространство.

3. Сопряженное $\mathscr{D}'$ к $\mathscr{D}$ — пространство всех распределений на $\mathbf{R}^n$, наделенное сильной топологией, есть монтелевское пространство, сопряженным к которому служит поэтому $\mathscr{D}$.

4. Пространство $\mathscr{E}$ всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbf{R}^n$, наделенное топологией компактной сходимости каждой производной, есть монтелевское пространство Фреше.

5. Сопряженное $\mathscr{E}'$ к $\mathscr{E}$ — пространство всех распределений на $\mathbf{R}^n$ с компактным носителем, наделенное сильной топологией, есть монтелевское пространство, сопряженным к которому служит поэтому $\mathscr{E}$.

6. Пространство $\mathscr{H}(D)$ всех голоморфных функций в области $D \subset \mathbf{C}^n$, наделенное топологией компактной сходимости, есть монтелевское пространство Фреше.

7. Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве X; для каждого p такого, что $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, пространство $L^p(X, \mu)$, снабженное нормой $\|f\|_p$, — банаховское. Если $1 \leqslant p < +\infty$, то сопряженное к $L^p(X, \mu)$ канонически изоморфно пространству $L^q(X, \mu)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В частности, если $1 < p < +\infty$, то $L^p(X, \mu)$ рефлексивно; $L^2(X, \mu)$ есть гильбертово пространство.

СЛОВАРЬ

ВВЕДЕНИЕ

Жирными прописными буквами набраны термины, определенные в этой книге; каждый из них сопровождается ссылкой на главу, параграф и пункт, где он введен. Остальные слова представляют собой либо перевод терминов, определенных в этой книге, на язык другой терминологии (французской или иностранной), либо термины, означающие понятия, тесно связанные с изучаемыми в книге, но не рассматриваемые в основном тексте. Немецкие и английские термины, весьма близкие по написанию с французскими, имеющими тот же смысл, опущены. Тире заменяет повторение рассматриваемого термина. Наименование, состоящее из нескольких слов, приводится вообще лишь на первую букву одного из них (например, „espace localement convexe" — на букву L, но не на буквы E и C). (B) означает ссылку на книгу S. Banach, Théorie des opérations linéaires (Warzawa, 1932) *).

A

ABSORBANT (ENSEMBLE) (поглощающее множество): I, 1, 3.

ABSORPTION (поглощение) одного множества другим: I, 1, 3.

Adjoint (first): сопряженное к локально выпуклому пространству; — **(second)**: второе сопряженное к локально выпуклому пространству.

AFFAIBLIE (TOPOLOGIE) (ослабленная топология): IV, 2, 1. В другой терминологии: topologie faible (слабая топология). Нем.: schwache Topologie; англ.: weak topology.

Aichkörper: выпуклое множество, определяемое неравенством вида $p(x) \leqslant \alpha$, где p — выпуклая положительно однородная функция.

APPLICATION CANONIQUE (каноническое отображение) локально выпуклого пространства E в его второе сопряженное E'': IV, 3, 3; — — E_ι в $\bigoplus_{\iota \in I} E$ (где (E_ι) — семейство гильбертовых пространств): V, 2, 1.

*) Украинский перевод: С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

ASSOCIÉ (ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE SÉPARÉ): отделимое топологическое векторное пространство, ассоциированное с данным топологическим векторным пространством: I, 1, 6.

ASSOCIÉE (FORME HERMITIENNE NON DÉGÉNÉRÉE): невырожденная эрмитова форма, ассоциированная с данной эрмитовой формой: V, 1, 1.

Associée (opération) (сопряженный оператор) (B): сопряженное к данному непрерывному линейному отображению.

B

BASE ALGÉBRIQUE (алгебраический базис) предгильбертова пространства: V, 2, 3; в другой терминологии: base de Hamel (базис Хамеля); — **ORTHONORMALE** (ортонормальный базис) предгильбертова пространства: V, 2, 3; в другой терминологии: système orthonormal complet (полная ортонормальная система).

Base (базис) банаховского пространства (B): последовательность (a_n) элементов рассматриваемого пространства E, обладающая тем свойством, что для каждого $x \in E$ существует однозначно определенная последовательность (ξ_n) скаляров такая, что ряд с общим членом $\xi_n a_n$ сходится в E и имеет своей суммой x.

BIDUAL (второе сопряженное): IV, 3, 3. Англ: second adjoint, second conjugate. || Второе сопряженное к локально выпуклому пространству E часто обозначается E^{**} или $\bar{\bar{E}}$ (B).

Biorthogonales (suites) (B): последовательность (x_n) элементов нормированного пространства E и последовательность (x'_n) элементов его сопряженного E' называют биортогональными, если $\langle x_i, x'_j \rangle = \delta_{ij}$ (где δ_{ij} — кронеккеровский символ).

BORNÉ (ENSEMBLE) (ограниченное множество): III, 2, 1. Нем.: beschränkt; англ.: bounded.

Bornée (opération, transformation) (ограниченное отображение): линейное отображение топологического векторного пространства в топологическое векторное пространство, преобразующее некоторую окрестность нуля в ограниченное множество.

Bornologique (espace) (ограниченно замкнутое пространство): локально выпуклое пространство, в котором каждое выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества, есть окрестность нуля. Англ.: boundedly closed space.

C

CARRÉ SCALAIRE (скалярный квадрат): V, 1, 3.

COMPATIBLE (TOPOLOGIE) согласующаяся (топология) с данной двойственностью: IV, 2, 3. Англ.: admissible topology.

COMPATIBLES (STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL ET TOPOLOGIE) (согласующиеся структура векторного пространства и топология): I, 1, 1.

Complet (système orthonormal) (полная ортонормальная система): ортонормальный базис.

Complète (suite) (B): тотальная последовательность в пространстве (C) или ($L^{(r)}$) (см. **Espaces de Banach particuliers**).

Complete linear space: полное топологическое векторное пространство. ‖Авторы стран английского языка употребляют этот термин в различных смыслах: у некоторых он означает квазиполное пространство, у других — полуполное пространство (см. **QUASI-COMPLET (ESPACE)** и **Semi-complet (espace)**.

CÔNE (конус): II, 1, 4. Нем.: Kegel. — **ÉPOINTÉ** (затупленный —): II, 1, 4; —**POINTÉ** (заостренный —): II, 1, 4.

Conjugué (espace) (сопряженное пространство) (B): сопряженное к локально выпуклому пространству. Англ.: conjugate, first conjugate.

CONJUGUÉ (ESPACE PRÉHILBERTIEN): предгильбертово пространство, дуальное к данному комплексному предгильбертову пространству: V, 1, 3.

Conjuguée (opération) (сопряженный оператор) (B): сопряженное к данному непрерывному линейному отображению.

Contredomaine (B): область значений отображения.

Convex linear space: локально выпуклое пространство.

CONVEX (CORPS) (выпуклое тело): II, 3, 2; — **(ENSEMBLE)** (— множество): II, 1, 1; — **(FONCTION)** (— функция): II, 5, 1.

COORDONNÉES (координаты), относительно данного ортонормального базиса: V, 2, 3.

D

Définie positive (forme hermitienne) (положительно определенная эрмитова форма): невырожденная положительная эрмитова форма.

DEMI-ESPACES FERMÉS (— OUVERTS) (замкнутые, соотв. открытые полупространства), определяемые замкнутой гиперплоскостью: II, 1, 6. Нем.: Halbräume; англ.: half spaces.

Dérivé faible (слабое производное) множества в сопряженном к банаховскому пространству (B): множество пределов всевозможных слабо сходящихся последовательностей точек рассматриваемого множества.

Développement (разложение) элемента x банаховского пространства по паре биортогональных последовательностей (a_n), (a'_n) (B): ряд с общим членом $\langle x, a'_n\rangle a_n$.

DIMENSION (размерность) выпуклого множества: II, 1, 3; — **HILBERTIENNE** (гильбертова —) гильбертова пространства: V, 2, 4.

Dimension linéaire (линейная размериость) полного метризуемого вещественного топологического векторного пространства (B): отношение „X и Y — полные метризуемые вещественные топологические векторные пространства и X изоморфно замкнутому векторному подпространству пространства Y^a есть отношение предпорядка $R\{X, Y\}$. Пусть $S\{X, Y\}$ — ассоциированное с ним отношение эквивалентности „$R\{X, Y\}$ и $R\{Y, X\}^a$. $\tau_Z(S\{X, Z\})$*) называется линейной размерностью пространства X.

*) Класс эквивалентности пространства X по отношению эквивалентности S. — *Прим. перев.*

DISQUÉ (ENSEMBLE) (закругленное множество): I, 1, 3. Англ.: circled set.

Distanzfunktion: см. **JAUGE.**

Domaine (B): область определения отображения.

DUAL (сопряженное) к отделимому локально выпуклому пространству: IV, 1, 1; — **ALGÉBRIQUE** (алгебраическое—): IV, 1, 1; **FAIBLE** (слабое—): IV, 2, 1; — **FORT** (сильное —): IV, 3, 1; — **TOPOLOGIQUE** (топологическое —): IV, 1, 1. В другой терминологии (B): espace conjugué. Англ.: adjoint, first adjoint, conjugate, first conjugate. ‖ Сопряженное к локально выпуклому пространству E часто обозначается E^* или $\bar{E}$ (B).

DUALITÉ (ESPACES EN) (пространства в двойственности): IV, 1, 1.

E

Entourage (B): voisinage (окрестность).

ENVELOPPE CONVEXE (выпуклая оболочка) множества: II, 1, 3; — — **DISQUÉE** (закругленная — —) множества: II, 6, 2; — **ÉQUILIBRÉE** (уравновешенная —) множества: I, 1, 3; — **FERMÉE CONVEXE** (замкнутая выпуклая —) множества: II, 1, 6; — — — **ET DISQUÉE** (закругленная — — —) множества: II, 6, 2. Нем.: Hülle; англ.: hull.

ÉQUIHYPOCONTINU (ENSEMBLE $\mathfrak{S}$-) (равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывное множество): III, 4, 5; — **(ENSEMBLE** $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-)(— $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$- — —): III, 4, 5

ÉQUILIBRÉ (ENSEMBLE) (уравновешенное множество): I, 1, 3.

Équivalents (espaces normés) (B): два нормированных пространства называются эквивалентными, если существует изометричное линейное отображение одного из них на другое.

ESPACE DE BANACH (банаховское пространство): I, 1, 5; в другой терминологии (B): espace de type (B) (пространство типа (B)); — **DE FRÉCHET** (— Фреше): II, 2, 1 и 6, 2; — **DE HILBERT** (гильбертово —): V, 1, 3; — **DE MONTEL** (монтелевское —): IV, 3, 4; в другой терминологии: espace (M) (пространство (M)).

Espace de type (B) (пространство типа (B)) (B): банаховское пространство; — **de type** (F) (— типа (F)) (B): полное метризуемое топологическое векторное пространство (вещественное или комплексное); — **de type** (G) (— типа (G)) (B): полная метризуемая коммутативная группа; — (M): монтелевское пространство.

Espaces de Banach particuliers (B):

Espace (C) (пространство (C)): пространство $\mathcal{C}(I)$ всех непрерывных числовых функций на компактном интервале $I \subset \mathbf{R}$, снабженное нормой $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$.

Espace $(C^{(p)})$ (пространство $(C^{(p)})$): пространство всех числовых функций на I с непрерывной p-й производной, снабженное нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)| + \sup_{t \in I} |x^{(p)}(t)|.$$

Espace (c) (пространство (c)): пространство всех вещественных числовых последовательностей $x = (\xi_n)$, для которых существует конечный

$\lim_{n\to\infty} \xi_n$, снабженное нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$ (подпространство нормированного пространства (m); см. ниже).

Espace (c_0) (пространство (c_0)): пространство $\overline{\mathscr{K}(\mathbf{N})}$ всех вещественных числовых последовательностей, стремящихся к нулю, снабженное нормой, индуцированной из пространства (c).

Espace $(L^{(p)})$ (пространство $L^{(p)}$) $(1 \leqslant p < \infty)$: пространство $L^p(I)$ всех измеримых числовых функций с интегрируемой p-й степенью по мере Лебега *) на интервале $I \subset \mathbf{R}$, снабженное нормой

$$\|x\| = \left(\int_I |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Espace $l^{(p)}$ (пространство $l^{(p)}$) $(1 \leqslant p < +\infty)$: пространство $L^p(\mathbf{N})$ всех числовых последовательностей $x = (\xi_n)$, для которых ряд с общим членом $|\xi_n|^p$ сходится, снабженное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_n |\xi_n|^p\right)^{1/p}.$$

Espace (M) (пространство (M)): пространство всех ограниченных числовых функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$, измеримых по мере Лебега *), снабженное нормой $\|x\| = M_\infty(|x|)$ (максимум по мере функции $|x(t)|$ на I).

Espace (m) (пространство (m)): пространство $L^\infty(\mathbf{N})$ всех ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_n)$, снабженное нормой $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$.

EXTENSION à C (расширение до C) тела скаляров: II, 6, 1.

Extension d'une fonctionnelle (продолжение функционала) (B): продолжение линейной формы.

EXSTRÉMAL (POINT) (экстремальная точка) выпуклого множества: II, 4, 2.

EXSTRÉMALE (GÉNÉRATRICE) (экстремальная образующая) выпуклого конуса: II, 4, 2.

F

FAIBLE (TOPOLOGIE) (слабая топология): IV, 1, 2 и 2, 1. Нем.: schwache Topologie, minimale Topologie; англ.: weak* topology (слабая топология $\sigma(E', E)$ в сопряженном E' к локально выпуклому пространству E).

Faiblement complet (espace) (слабо полное пространство) (B): банаховское пространство E, в котором каждая последовательность Коши по ослабленной топологии $\sigma(E, E')$ сходится в этой топологии; — **continue (fonctionnelle)** (— непрерывный функционал) (B): линейная форма f на E, для которой $f(x_n)$ сходится к $f(x)$, какова бы ни была последовательность (x_n) точек из E, сходящаяся к x в топологии $\sigma(E, E')$; — **dense (ensemble)** (— плотное множество) (B): множество $M' \subset E'$

*) Две функции, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль, отождествляются.

такое, что каждая точка из E' есть предел в топологии $\sigma(E', E)$ некоторой последовательности точек из M'; — **fermé (ensemble)** (— замкнутое множество) (B): множество $M' \subset E'$, содержащее предел каждой последовательности своих точек, сходящейся в топологии $\sigma(E', E)$.

Fermée (suite) (B): тотальная последовательность в пространстве (C) или $(L^{(p)})$ (см. **Espaces de Banach particuliers**).

Folgenkompakte Menge (секвенциально компактное миожество): множество K, каждая последовательность точек которого содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из K.

Folgenseparabler Raum (секвенциально сепарабельное пространство): топологическое векторное пространство, содержащее последовательность точек (x_n) такую, что каждая точка пространства есть предел иекоторой ее подпоследовательности.

Folgenvollständiger Raum: полуполное пространство (см. **Semi-complet (espace)**).

Fonctionnelle linéaire (линейный функционал) (B): *непрерывная* линейная форма.

Fondamental (ensemble) (B): тотальное множество.

FORTE (TOPOLOGIE) (сильная топология): IV, 3, 1. Нем.: starke Topologie; англ.: strong topology.

G

Gauge: см. **JAUGE.**

Gleichmässig beschränkte Menge (равномерно ограниченное множество): множество в отделимом локально выпуклом пространстве E, ограниченное в топологии, индуцированной в E сильной топологией второго сопряженного E'' (мажорирующей исходную топологию пространства E).

Glissante (métrique) (инвариаитная метрика) (B): расстояние на коммутативной группе, инвариантное относительно переносов.

H

Halbraum, halfspace: полупространство.

Hamel (base de) (базис Хамеля): (алгебраический) базис топологического векторного пространства.

HERMITIENNE (FORME) (эрмитова форма): V, 1, 1.

HILBERTIEN (ESPACE) (гильбертово пространство): V, 1, 3.

Hull, Hülle: оболочка.

HYPERPLAN D'APPUI (опорная гиперплоскость): II, 3, 2. В другой терминологии (B): plan d'appui (опорная плоскость). Нем.: Stützebene, Stützhyperebene; англ.: plane of support. || В (B) понятию „опорной плоскости" множества A (в нормированном пространстве) придан более общий смысл: предполагается лишь, что расстояние от A до рассматриваемой гиперплоскости (по одну сторону от которой расположено A) равно нулю, но гиперплоскость не обязательно содержит точку из A.

HYPOCONTINUE (APPLICATION BILINÉAIRE $\mathfrak{S}$-) ($\mathfrak{S}$-гипонепрерывное билинейное отображение): III, 4, 2; — **(APPLICATION BILINÉAIRE ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$)-)** (($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$)-— — —): III, 4, 2.

I

Indéfinie (forme hermitienne) (неопределенная эрмитова форма): эрмитова форма, могущая принимать и значения >0, и значения <0.

INITIALE (TOPOLOGIE) (исходная топология): IV, 2, 1.

INVERSE A DROITE (A GAUCHE) (правое (левое) обратное) линейного отображения: I, 1, 8. Нем.: Linksreziproke, Rechtsreziproke; англ.: left inverse, right inverse.

Isomorphes (espaces normés) (изоморфные нормированные пространства) (В) нормированные пространства, обладающие изоморфными структурами топологического векторного пространства, но не обязательно изоморфными структурами нормированного пространства (иными словами — не обязательно изометричные).

ISOMORPHISME (изоморфизм) топологического векторного пространства на топологическое векторное пространство: I, 1, 1.

J

JAUGE (калибровочная функция, функционал Минковского) поглощающего симметричного выпуклого множества: II, 5, 3. Нем.: Distanzfunktion, Strahldistanz; англ.: gauge.

K

KEGEL: см. **CÔNE.**

L

LIMITE INDUCTIVE (индуктивный предел) локально выпуклых топологий: II, 2, 4; — — **STRICTE** (строгий — —) последовательности локально выпуклых пространств: II, 2, 5.

Linéaire (ensemble) (В): векторное подпространство; — **(espace)** (В): (вещественное) векторное пространство.

Linear manifold: векторное подпространство, линейное многообразие.

Linksreziproke: левое обратное.

LOCALEMENT CONVEXE (ESPACE) (локально выпуклое пространство): II, 2, 1 и 6, 2; — — **(TOPOLOGIE)** (— — топология): II, 2, 1 и 6, 2.

N

NON DÉGÉNÉRÉE (FORME HERMITIENNE) (невырожденная эрмитова форма): V, 1, 1.

Normale, normée (suite) (нормальная или нормированная последовательность) (В): последовательность элементов с нормой 1 в банаховском пространстве.

O

Opérateur, opération (оператор, операция) (B): отображение.

ORDONNÉ (ESPACE VECTORIEL) (упорядоченное векторное пространство): II, 1, 5.

ORTHOGONAL (SOUS-ESPACE) (ортогональное подпространство): IV, 1, 4 и V, 1, 5.

Orthogonalabgeschlossener Teilraum: подпространство сопряженного E' к локально выпуклому пространству E, замкнутое в слабой топологии $\sigma(E', E)$.

Orthogonal complement of a subspace: ортогональное дополнение к замкнутому векторному подпространству гильбертова пространства.

ORTHOGONALES (PARTIES) (ортогональные множества): IV, 1, 4 и V, 1, 5.

ORTHOGONAUX (VECTEURS) (ортогональные векторы): V, 1, 3.

ORTHONORMAL (ENSEMBLE) (ортонормальное множество): V, 2, 3.

ORTHONORMALE (FAMILLE) (ортонормальное семейство): V, 2, 3.

ORTHONORMALISATION (ортонормализация) последовательности векторов: V, 2, 4.

P

Plan d'appui (B), **plane of support:** опорная гиперплоскость.

POLAIRE (поляра) множества: IV, 1, 3.

POSITIVE (FORME LINÉAIRE) (положительная линейная форма): II, 1, 5; — **(FORME HERMITIENNE)** (— эрмитова форма): V, 1, 2. В другой терминологии: forme positive semi-définie (положительно полуопределенная форма).

POSITIVE NON DÉGÉNÉRÉE (FORME HERMITIENNE) (невырожденная положительная эрмитова форма): V, 1, 2. В другой терминологии: forme définie positive (положительно определенная форма).

POSITIVEMENT HOMOGÈNE (FONCTION) (положительно однородная функция): II, 5, 3.

PRÉHILBERTIEN (ESPACE) (предгильбертово пространство): V, 1, 3.

PRODUIT SCALAIRE (скалярное произведение): V, 1, 3.

PROJECTEUR (проектор): I, 1, 8 и V, 1, 5; — **ORTHOGONAL** (ортогональный —): V, 1, 5.

PROJECTION (проекция) на выпуклое множество в предгильбертовом пространстве: V, 1, 4.

Pseudo-norm (полунорма): см. **SEMI-NORME.**

Q

QUASI-COMPLET (ESPACE) (квазиполное пространство): III, 2, 5.

Quasi-tonnelé (espace) (квазибочечное пространство): локально выпуклое пространство, в котором каждая бочка, поглощающая все ограниченные множества, есть окрестность нуля.

R

Rechtsreziproke: правое обратное.

RÉFLEXIF (ESPACE) (рефлексивное пространство): IV, 3, 3. Прежняя терминология: regular space, regulärer Raum (регулярное пространство).

Regular space, regulärer Raum: рефлексивное пространство (см. **RÉFLEXIF (ESPACE)**).

Régulièrement fermé (sous-espace) (регулярно замкнутое подпространство) (B): векторное подпространство сопряженного E' к нормированному пространству E, замкнутое в слабой топологии $\sigma(E', E)$.

Relatively strong topology (относительно сильная топология): топология $\tau(E, E')$ в пространстве E, приведенном в двойственность с пространством E'.

Rotation (вращение) (B): изометричное отображение нормированного пространства на себя, оставляющее инвариантной хотя бы одну точку.

S

SAILLANT (CÔNE CONVEXE POINTÉ) (выступающий заостренный выпуклый конус): II, 1, 4.

Schwache Topologie: слабая топология.

Second conjugate: второе сопряженное.

Semi-complet (espace) (полуполное пространство): топологическое векторное пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится.

Semi-définie (forme hermitienne positive) (полуопределенная положительная эрмитова форма): положительная эрмитова форма, вырожденная или нет.

SEMI-NORME (полунорма): II, 5, 3 и 6, 2. В другой терминологии: pseudonorm.

SEMI-RÉFLEXIF (ESPACE) (полурефлексивное пространство): IV, 3, 3.

SÉPARÉMENT CONTINUE (APPLICATION BILINÉAIRE) (раздельно непрерывное билинейное отображение): III, 4, 1.

SÉPARÉMENT ÉQUICONTINU (ENSEMBLE) (раздельно равностепенно непрерывное множество): III, 4, 5.

SÉPARÉS (ENSEMBLES) PAR UN HYPERPLAN FERMÉ (множества, отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью): II, 3, 2.

SESQUILINÉAIRE (FORME) (полуторалинейная форма): V, 1, 1.

SOMME DIRECTE (прямая сумма) локально выпуклых топологий: II, 2, 3; — — **TOPOLOGIQUE** (топологическая — —) конечного числа топологических векторных пространств: I, 1, 8; локально выпуклых пространств: II, 2, 3; — **HILBERTIENNE** (гильбертова —): V, 2, 2; — — **EXTERNE** (внешняя — —): V, 2, 1.

SOUS-JACENT (ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE): базисное топологическое векторное пространство: I, 1, 1.

Sphère (B): замкнутый шар; — **ouverte** (B): открытый шар.

Starke Topologie: сильная топология.

Strahldistanz: см. **JAUGE**.

STRICTEMENT CONVEXE (FONCTION) (строго выпуклая функция): II, 5, 1.
STRICTEMENT SÉPARÉS (ENSEMBLES) PAR UN HYPERPLAN FERMÉ (множества, строго отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью): II, 3, 2.
Strong topology: сильная топология.
Stützebene, Stützhyperebene: опорная гиперплоскость.
Subspace: под этим некоторые авторы из стран английского языка понимают *замкнутое* векторное подпространство топологического векторного пространства.
SUPPLÉMENTAIRE ALGÉBRIQUE (алгебраическое дополнение) подпространства: I, 1, 8; — **ORTHOGONAL** (ортогональное —) замкнутого подпространства в гильбертовом пространстве: V, 1, 5; в другой терминологии: orthogonal complement (ортогональное дополнение); — **TOPOLOGIQUE** (топологическое —) подпространства: I, 1, 8.
SYMÉTRIQUE (FORME BILINÉAIRE) (симметричная билинейная форма): V, 1, 1.
SYSTÈME FONDAMENTAL D'ENSEMBLES BORNÉS (фундаментальная система ограниченных множеств): III, 2, 2.

T

TONNEAU (бочка): III, 1, 1.
TONNELÉ (ESPACE) (бочечное пространство): III, 1, 1.
TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE BORNÉE (топология ограниченной сходимости): III, 3, 1; — **DE MACKEY** (— Макки [≡относительно сильная —]): IV, 2, 3; — **DÉFINIE PAR UN ENSEMBLE DE SEMI-NORMES** (— определяемая некоторым множеством полунорм): II, 5, 4 и 6, 2; — (ℭ-) (ℭ- —): III, 3, 1.
TOPOLOGIQUEMENT LIBRE (ENSEMBLE) (топологически свободное множество): I, 2, 1; — — **(FAMILLE)** (— — семейство): I, 2, 1.
TOTAL (ENSEMBLE) (тотальное множество): I, 2, 1.
TRANSPOSÉE (сопряженное) к непрерывному линейному отображению: IV, 4, 1. В других терминологиях: opération associée, opération conjuguée (B), adjointe.

U

Uniform topology (равномерная топология): топология, определяемая в пространстве $L(E, E)$ непрерывных линейных отображений нормированного пространства E в себя нормой $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$, т. е. топология ограниченной сходимости на E.
Uniformément convexe (espace) (равномерно выпуклое пространство): нормированное пространство E, в котором норма $\|x\|$ обладает следующим свойством: для каждого ε $(0 < \varepsilon < 2)$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ следует $\|x + y\| \leqslant 2 - \delta$.
Uniformly bounded set (равномерно ограниченное множество): множество в отделимом локально выпуклом пространстве E, ограниченное в топологии, индуцированной в E сильной топологией второго сопряженного E'' (мажорирующей исходную топологию пространства E).

Universel (espace) (универсальное пространство) (B): банаховское пространство счетного типа, обладающее тем свойством, что каждое банаховское пространство счетного типа изометрично некоторому его векторному подпространству.

V

VARIÉTÉ D'APPUI (опорное многообразие) выпуклого множества: II, 4, 2; — **LINÉAIRE COMPLEXE** (комплексное линейное —): II, 6, 1; — **LINÉAIRE RÉELLE** (вещественное линейное —): II, 6, 1.

Vollständig: полное.

W

Weak topology (слабая топология): ослабленная топология $\sigma(E, E')$ в локально выпуклом пространстве E с сопряженным E'.

Weak* topology: слабая топология $\sigma(E', E)$ в сопряженном E' к локально выпуклому пространству E.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ПЕРЕВОД НЕКОТОРЫХ МЕСТ ИЗ ДРУГИХ КНИГ „ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИКИ“ Н. БУРБАКИ, НА КОТОРЫЕ ИМЕЮТСЯ ССЫЛКИ В ЭТОЙ КНИГЕ*)

([1]) К стр. 42:

„7) Пусть K — коммутативное тело. Показать, что не существует формального ряда $u(X, Y) \in K[[X, Y]]$, для которого бы

$$(XY)^{-m}(X+Y)\,u(X, Y) = 1$$

при всех целых $m > 0$.“

([2]) К стр. 43 и 311:

„14) Показать, что каждый унитарный A-модуль, обладающий базисом с множеством индексов I, равномощен множеству $A \times I$, если хотя бы одно из множеств A, I бесконечно.“

([3]) К стр. 46:

„Предложение 1. *Для того чтобы семейство (a_ι) элементов векторного пространства было свободным, необходимо и достаточно, чтобы $a_\varkappa$ не было линейной комбинацией элементов a_ι с индексами $\iota \neq \varkappa$ ни для какого индекса $\varkappa$.*“

([4]) К стр. 46:

„Лемма 2. *Пусть (p_n) — последовательность полиномов без свободного члена, определяемая индукцией по n условиями $p_0(t) = 0$ и $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - (p_n(t))^2)$ $(n \geqslant 0)$. На интервале $[0, 1]$ эта последовательность возрастает и равномерно сходится к $\sqrt{t}$.*“

([5]) К стр. 53:

„(КТа) *Каковы бы ни были окрестности U и V нуля тела K, существует окрестность W нуля такая, что $W(\mathbf{C}V)^{-1} \subset U$ и $(\mathbf{C}V)^{-1} W \subset U$.*“

([6]) К стр. 55:

„Предложение 2. *Равномерная структура $\mathcal{U}$ на множестве E, обладающая счетной фундаментальной системой окружений, совпадает с равномерной структурой, определяемой некоторым отклонением f на E.*

---

*) При переводе упражнений указания пути решения опущены.

Пусть (V_n) — счетная фундаментальная система окружений для $\mathcal{U}$. Определим по индукции последовательность (U_n) симметричных окружений для $\mathcal{U}$ таких, что $U_1 \subset V_1$ и

$$\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n \cap \left(\bigcap_{p=1}^{n} V_p \right) \quad \text{для} \quad n \geqslant 1.$$

Ясно, что тогда (U_n) также будет фундаментальной системой окружений для $\mathcal{U}$, причем $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ $(n \geqslant 1)$. Пусть g — числовая функция на $E \times E$, определенная следующим образом: $g(x, y) = 0$, если $(x, y) \in U_n$ для всех n; $g(x, y) = 2^{-k}$, если $(x, y) \in U_n$, когда $1 \leqslant n \leqslant k$, но $(x, y) \notin U_{k+1}$; $g(x, y) = 1$, если $(x, y) \notin U_1$. Функция g симметрична и положительна и $g(x, x) = 0$ для каждого $x \in E$. Положим

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

где нижняя грань берется по множеству всех конечных последовательностей $(z_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ (с произвольными p), в которых $z_0 = x$ и $z_p = y$. Покажем, что f есть *отклонение*, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{1}{2} g(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y). \tag{1}$$

Действительно, из определения f непосредственно следует, что f удовлетворяет неравенству треугольника, симметрично и $\geqslant 0$; а очевидное второе неравенство (1) показывает, что $f(x, x) = 0$ для каждого $x \in E$, так что f есть отклонение. Для доказательства первого неравенства (1) покажем, индукцией по p, что каждая последовательность $(z_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$, образованная $p+1$ точками из E и такая, что $z_0 = x$ и $z_p = y$, удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} g(x, y). \tag{2}$$

При $p = 1$ это неравенство очевидно. Положим $a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1})$; если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то неравенство (2) очевидно, поскольку $g(x, y) \leqslant 1$. Предположим поэтому, что $a < \frac{1}{2}$; пусть h — наибольший из номе-

ров k, для которых $\sum_{i<k} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}$, так что $\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}$, а $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > \frac{a}{2}$, откуда $\sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}$. В силу предположения индукции, $g(x, z_h) \leqslant a$, $g(z_{h+1}, y) \leqslant a$; с другой стороны, очевидно, и $g(z_h, z_{h+1}) \leqslant a$. Пусть k — наименьшее целое > 0 такое, что $2^{-k} \leqslant a$; имеем $k \geqslant 2$ и, по определению функции g, $(x, z_h) \in U_k$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$, $(z_{h+1}, y) \in U_k$; поэтому $(x, y) \in \overset{3}{U}_k \subset \overset{3}{U}_{k-1}$, откуда $g(x, y) \leqslant 2^{1-k} \leqslant 2a$.

Неравенства (1) показывают теперь, что каково бы ни было $a > 0$, множество $\overset{-1}{f}([0, a])$ содержит U_k для каждого номера k такого, что $2^{-k} < a$, и, с другой стороны, каждое U_k содержит множество $\overset{-1}{f}([0, 2^{-k-1}])$; тем самым множества $\overset{-1}{f}([0, a])$ образуют фундаментальную систему окружений для структуры $\mathcal{U}$.

([7]) К стр. 77 и 205:

„*12) Множество $E \subset \mathbf{R}^n$, содержащее 0, называют *звездным* (относительно точки 0), если $tx \in E$, каковы бы ни были $x \in E$ и $t \in [0, 1]$. Пересечение множества E с замкнутой полупрямой, выходящей из точки 0, есть либо вся эта полупрямая, либо отрезок с одним из концов в этой точке. *Скорлупой* множества E называется множество K, образованное концами этих отрезков, отличными от точки 0, и точкой 0, если к ней сводится пересечение некоторой полупрямой с E. Ниже предполагается, что $0 \notin K$.

а) Показать, что скорлупа множества E содержится в его границе; дать пример, в котором эти два множества были бы различны.

б) Показать, что если скорлупа K множества E компактна, то существует гомеоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя, отображающий K на $\mathbf{S}_{n-1}$, $\overline{E}$ на $\mathbf{B}_n$ и внутренность E на внутренность $\mathbf{B}_n$. Вывести отсюда, что граница множества E совпадает с его скорлупой K, а внутренность E — с множеством точек tx, где x пробегает K, а t — интервал $[0, 1[\subset \mathbf{R}$.

в) Если E не ограниченно и его граница совпадает с его скорлупой K, то внутренность E гомеоморфна пространству $\mathbf{R}^n$, а K — открытому подмножеству сферы $\mathbf{S}_{n-1}$.

г) Дать пример неограниченного звездного множества, скорлупа которого замкнута, но не совпадает с границей множества."

([8]) К стр. 79:

„*7) Пусть E — метрическое пространство. Для любых двух непустых его подмножеств A и B положим

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) \quad \text{и} \quad \sigma(A, B) = \max(\rho(A, B), \rho(B, A));$$

кроме того, положим $\sigma(\varnothing, \varnothing) = 0$ и $\sigma(\varnothing, A) = \sigma(A, \varnothing) = +\infty$ для каждого непустого множества $A \subset E$. Показать, что σ есть отклонение на множестве $\mathfrak{P}(E)$ всех подмножеств множества E и что определяемая им равномерная структура совпадает с получаемой из равномерной структуры пространства E по способу упражнения 7 § 2 гл. II (14).

На множестве $\mathfrak{F}(E)$ всех непустых замкнутых подмножеств множества E σ является *расстоянием*. Показать, что если E *полно*, то $\mathfrak{F}(E)$ — *полное* метрическое пространство."

(9) К стр. 86 и 152:

„*1) Пусть E — не компактное локально компактное пространство и $\mathfrak{U}$ — множество всех симметричных выпуклых подмножеств пространства $\mathscr{K}(E)$*), след которых на каждом из подпространств $\mathscr{K}(E, K)$**) (где K — произвольное компактное множество в E) есть окрестность нуля в этом подпространстве для топологии равномерной сходимости на K.

а) Показать, что $\mathfrak{U}$ есть фундаментальная система окрестностей нуля для локально выпуклой топологии в $\mathscr{K}(E)$, мажорирующей топологию равномерной сходимости на E и называемой далее *сильной* топологией в $\mathscr{K}(E)$ (*индуктивный предел* топологий пространств $\mathscr{K}(E, K)$; см. Топ. векст. простр., гл. II, § 2); эта топология согласуется со структурой упорядоченного векторного пространства в $\mathscr{K}(E)$. Показать, что топология, индуцируемая в каждом из подпространств $\mathscr{K}(E, K)$ сильной топологией пространства $\mathscr{K}(E)$, совпадает с топологией равномерной сходимости на K; вывести отсюда, что каждое подпространство $\mathscr{K}(E, K)$ сильно замкнуто в $\mathscr{K}(E)$.

б) Показать, что для того чтобы линейное отображение пространства $\mathscr{K}(E)$ в локально выпуклое пространство F было непрерывным в сильной топологии, необходимо и достаточно, чтобы его сужение на каждое из подпространств $\mathscr{K}(E, K)$ было непрерывно в топологии равномерной сходимости на K. В частности, меры на E совпадают с сильно непрерывными линейными формами.

Точно так же для того, чтобы множество H линейных отображений $\mathscr{K}(E)$ в F было равностепенно непрерывным (при наделении $\mathscr{K}(E)$ сильной топологией), необходимо и достаточно, чтобы каково бы ни было компактное множество $K \subset E$, множество сужений отображений из H на $\mathscr{K}(E, K)$ было равностепенно непрерывно (в топологии равномерной сходимости на K).

в) Вывести из б), что каждое ограниченное подмножество H пространства $\mathscr{M}(E)$ мер на E***) равностепенно непрерывно при наделении $\mathscr{K}(E)$ сильной топологией.

---

*) Всех непрерывных числовых функций с компактным носителем на E. — *Прим. перев.*

**) Образованных теми функциями из $\mathscr{K}(E)$, носитель которых содержится в K. — *Прим. перев.*

***) Наделенного топологией простой сходимости на $\mathscr{K}(E)$. — *Прим. перев.*

*2) Пусть E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности (Общ. топ., гл. I, § 10, n° 11).

а) Для каждой непрерывной числовой функции h на E такой, что $h(x) > 0$ во всех точках $x \in E$, обозначим через $V(h)$ множество всех функций $f \in \mathscr{K}(E)$, удовлетворяющих условию $|f| \leqslant h$. Показать, что множества $V(h)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для сильной топологии в $\mathscr{K}(E)$. Вывести отсюда, что если E не компактно, то сильная топология в $\mathscr{K}(E)$ сильнее топологии равномерной сходимости на E.

б) Показать, что каждое сильно ограниченное подмножество пространства $\mathscr{K}(E)$ содержится в подпространстве $\mathscr{K}(E, K)$, определяемом надлежаще выбранным компактным множеством $K \subset E$.

в) Показать, что пространство $\mathscr{K}(E)$ в сильной топологии полно.

*3) Пусть E_0 — несчетное вполне упорядоченное множество, обладающее наибольшим элементом b и такое, что для каждого $x < b$ множество элементов $\leqslant x$ счетно. Наделим E_0 топологией $\mathscr{T}_-(E_0)$ ([34]) в которой E_0 компактно (Общ. топ., гл. I, § 10, упражнение 12); пусть E — локально компактное пространство, получающееся из E_0 удалением точки b. Показать, что сильная топология в $\mathscr{K}(E)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на E и что $\mathscr{K}(E)$, наделенное этой топологией, полно. Вывести отсюда, что в $\mathscr{K}(E)$ существуют сильно ограниченные множества, не содержащиеся в подпространстве $\mathscr{K}(E, K)$ ни при каком компактном $K \subset E$."

([10]) К стр. 90:

„8) а) Пусть (f_n) — последовательность возрастающих непрерывных функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ *) и таких, что $f_n \ll f_{n+1}$ **) для каждого n. Показать, что существует возрастающая непрерывная функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что $f_n \ll f$ для всех n.

б) Пусть (f_n) — последовательность возрастающих непрерывных функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и таких, что $1 \ll f_{n+1} \ll f_n$ для каждого n. Показать, что существует возрастающая непрерывная функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что $1 \ll f \ll f_n$ для всех n.

в) Пусть (f_n), (g_n) — две последовательности возрастающих непрерывных функций, принадлежащих $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и таких, что $f_n \ll f_{n+1}$, $g_m \gg g_{m+1}$ и $f_n \ll g_m$ для любых номеров m и n. Показать, что существует возрастающая непрерывная функция h, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что $f_n \ll h \ll g_m$, каковы бы ни были m и n.

---

*) $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ — множество всех вещественных функций, каждая из которых определена на некотором множестве из базиса фильтра $\mathfrak{F}$ в $\mathbf{R}$, образованного всевозможными интервалами вида $]x_0, +\infty[$. — *Прим. перев.*

**) Т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует x_ε, такое, что $f_n(t) \leqslant \varepsilon f_{n+1}(t)$ для всех $t \geqslant x_\varepsilon$. — *Прим. перев.*

В частности, показать, что существует убывающая непрерывная функция f, принадлежащая $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ и такая, что *никакой* логарифмический признак не позволяет установить, сходится ли интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ или нет („теоремы Дюбуа-Реймоиа“).“

([11]) К стр. 92:

„*2) Некоммутативная группа (в мультипликативной записи) G называется также *совершенно упорядоченной группой*, если она совершенно упорядочена отношением порядка $x \leqslant y$ таким, что $x \leqslant y$ влечет $xz \leqslant yz$ и $zx \leqslant zy$ для всех $z \in G$. Показать, что топология $\mathfrak{T}_0(G)$ в G (Общ. топ., гл. I, § 1, упражнение 3 ([34])) согласуется со структурой группы. В каком случае также топологии $\mathfrak{T}_+(G)$ и $\mathfrak{T}_-(G)$ (см. там же) согласуются со структурой группы в G?“

([12]) К стр. 116:

„Предложение 2. *Пусть f_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p выпуклых функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и c_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — произвольные p чисел $\geqslant 0$; функция $f = \sum_{i=1}^{p} c_i f_i$ выпукла на I. Если при этом f_j хотя бы для одного j строго выпукла на I и $c_j > 0$, то f строго выпукла на I.*“

„Предложение 3. *Пусть (f_α) — семейство выпуклых функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$; если верхняя огибающая g этого семейства конечна в каждой точке интервала I, то она выпукла на I.*“

„Предложение 4. *Пусть H — множество выпуклых функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$; если фильтр $\mathfrak{F}$ в H просто сходится на I к конечной числовой функции f_0, то последняя выпукла на I.*“

([13]) К стр. 122:

„Определение 1. *Пусть f, g — две числовые функции, принадлежащие $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$*) и $\geqslant 0$ на некотором множестве из $\mathfrak{F}$. Мы говорим, что f доминируется функцией g (по базису фильтра $\mathfrak{F}$), и пишем $f \lesssim g$, если существуют множество $X \in \mathfrak{F}$ и число $k > 0$ такие, что $f(t) \leqslant k g(t)$ для всех $t \in X$.*“

([14]) К стр. 129 и 386:

„*7) а) Пусть E — равномерное пространство; сопоставим каждому окружению V подмножество $\widetilde{V}$ произведения $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$, обра-

*) $\mathscr{H}(\mathfrak{F}, \mathbf{R})$ — множество всех вещественных функций, каждая из которых определена на некотором множестве из базиса фильтра $\mathfrak{F}$, заданного в рассматриваемом множестве E. — *Прим. перев.*

зованное всеми парами (X, Y) множеств из E такими, что *одновременно* $X \subset V(Y)$ и $Y \subset V(X)$ *). Показать, что множества $\check{V}$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в $\mathfrak{P}(E)$.

б) Пусть $\mathfrak{F}(E)$ — равномерное подпространство в $\mathfrak{P}(E)$, образованное всеми замкнутыми множествами из E. Показать, что $\mathfrak{F}(E)$ изоморфно отделимому равномерному пространству, ассоциированному с равномерным пространством $\mathfrak{P}(E)$."

([15]) К стр. 129:

„*4) Пусть $\mathfrak{F}(E)$ — множество всех замкнутых подмножеств равномерного пространства E, наделенное равномерной структурой, определенной в упражнении 7 § 2 ([14]). Показать, что если E предкомпактно, то и $\mathfrak{F}(E)$ предкомпактно.

*5) Показать, что если E компактно, то пространство $\mathfrak{F}(E)$ полно (и, следовательно, по упражнению 4, компактно)."

([16]) К стр. 138:

„°*11) а) Пусть A и B — два *вполне упорядоченных* множества из $\mathbf{R}$ (необходимо счетных; см. Общ. топ., гл. IV, § 2, упр. 1 ([16a])). Показать, что $A+B$ вполне упорядоченно и что для каждого $c \in A+B$ существует лишь конечное число пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$ и $c = a+b$.

б) Пусть K — произвольное коммутативное тело. Рассмотрим векторное подпространство E векторного пространства $K^{\mathbf{R}}$, образованное элементами (α_x) такими, что множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых $\alpha_x \neq 0$, *вполне упорядоченно*. Для любых двух элементов (α_x), (β_x) из E положим $(\alpha_x)(\beta_x) = (\gamma_x)$, где $\gamma_x = \sum_{y+z=x} \alpha_y \beta_z$ (сумма имеет смысл в силу а)).
Показать, что этот закон композиции в соединении со сложением определяет в E структуру *тела*; элементы этого тела обозначаются также $\sum_{t \in \mathbf{R}} \alpha_t X^t$ и называются *формальными рядами с вполне упорядоченными показателями* и коэффициентами из K."

([16a])

„Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *левой точкой прикосновения* для множества $A \subset \mathbf{R}$, если она является его точкой прикосновения и существует интервал $]a, b[$ $(b > a)$, не содержащий ни одной точки из A. Показать, что множество всех левых точек прикосновения всякого множества из $\mathbf{R}$ счетно. Вывести отсюда, что 1° всякое вполне

*) $V(X)$ — множество тех $y \in E$, для которых существует $x \in X$ такое, что $(x, y) \in V$. — *Прим. перев.*

упорядоченное множество в $\mathbf{R}$ счетно; 2° всякое множество в $\mathbf{R}$, состоящее из одних изолированных точек, счетно."

([17]) К стр. 144:

„Предложение 1. *Для того чтобы числовая функция f на топологическом пространстве E была полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного k множество $f^{-1}(]k, +\infty])$* (тех $x \in E$, для которых $f(x) > k$) *было открыто в E* (или, что то же, *чтобы $f^{-1}([-\infty, k])$ было замкнутым множеством в E*)."

([18]) К стр. 160 (Общ. топ., Рез., § 5, n° 7):

„Топологическое пространство E называют *нормальным*, если оно отделимо и удовлетворяет одной из следующих четырех равносильных аксиом (теоремы Урысона, гл. IX, § 4, теоремы 1 и 2):

(O_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества $A \subset E$ и $B \subset E$, существует непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 0 на A и 1 на B.*

(O'_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества $A \subset E$ и $B \subset E$, существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.*

(O''_V) *Каковы бы ни были замкнутое множество $A \subset E$ и его окрестность V, существует окрестность W множества A такая, что $\overline{W} \subset V$.*

(O'''_V) *Каковы бы ни были замкнутое множество $A \subset E$ и определенная на нем непрерывная числовая функция f, на E существует непрерывная числовая функция g, продолжающая f.*"

([19]) К стр. 168:

„Предложение 3. *Пусть H — равностепенно непрерывное множество в $\mathcal{C}(E, F)$ *) и A — всюду плотное подмножество пространства E. В множестве H равномерная структура простой сходимости на A и равномерная структура простой сходимости* на *E совпадают.*

Достаточно показать, что каковы бы ни были конечное множество $B \subset E$ и симметричное окружение V для F, существуют конеч-

---

*) $\mathcal{C}(E, F)$ — множество всех непрерывных отображений топологического пространства E в равномерное пространство F. — *Прим. перев.*

ное множество $B' \subset A$ и окружение V' для F такие, что след на $H \times H$ окружения $\mathbf{W}(B, V)$*) содержит след окружения $\mathbf{W}(B', V')$. Примем за V' симметричное окружение для F такое, что $\overset{3}{V'} \subset V$; каждая точка $x_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ обладает такой окрестностью U_i, что $(u(x_i),\ u(y)) \in V'$ для всех $u \in H$ и $y \in U_i$; пусть y_i — какая-нибудь точка из $U_i \cap A$ и B' — конечное подмножество множества A, образованное точками y_i. Если u и v — две функции из H такие, что $(u(y_i), v(y_i)) \in V'$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $(u(x_i), v(x_i)) \in \overset{3}{V'} \subset V$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и предложение доказано.“

([20]) К стр. 169:

„Предложение 9. *Пусть E — локально компактное пространство, E' — топологическое пространство, F — отделимое топологическое пространство и f — отображение $E \times E'$ в F. Для каждого $y \in E'$ обозначим через f_y частичное отображение $x \to f(x, y)$ пространства E в F. Для того чтобы f было непрерывным на $E \times E'$, необходимо и достаточно, чтобы отображение f_y было непрерывно для каждого $y \in E'$ и отображение $y \to f_y$ пространства E' в $\mathcal{C}(E, F)$, наделенное топологией компактной сходимости, было непрерывно.*“

([21]) К стр. 170:

„8) Пусть (E_n) — бесконечная последовательность метризуемых равномерных пространств. Показать, что равномерное пространство $E = \coprod_{n=1}^{\infty} E_n$ метризуемо...“

([22]) К стр. 176:

„Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств множества E такое, что каждый элемент последнего принадлежит по крайней мере одному множеству из $\mathfrak{S}$. Для того чтобы фильтр Φ в пространстве $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$**) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он был фильтром Коши* (для структуры $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$**)) *и просто сходился на E.*

---

*) $\mathbf{W}(B, V)$ — множество всех пар (u, v) отображений E в F таких, что $(u(x), v(x)) \in V$ каково бы ни было $x \in B$. — *Прим. перев.*

**) $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ — равномерное пространство, полученное путем наделения множества $\mathscr{F}(E, F)$ всевозможных отображений множества E в равномерное пространство F структурой $\mathscr{U}^{\mathfrak{S}}$ равномерной сходимости на множествах

Необходимость этих условий очевидна (поскольку структура $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$*) мажорируется структурой $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$). Обратно, предположим, что Φ есть фильтр Коши для $\mathscr{U}_{\mathfrak{S}}$ и просто сходится к некоторой функции u_0; пусть V — *замкнутое* окружение для F; для каждого множества $A \in \mathfrak{S}$ существует множество $H \in \Phi$ такое, что $(u(x), v(x)) \in V$ каковы бы ни были u и v из H и x из A. Для произвольной точки $x \in A$ имеем также $(u_0(x), v(x)) \in V$ для каждого $v \in H$, поскольку $u_0(x)$ есть предел $u(x)$ по фильтру Φ, а V замкнуто; тем самым u_0 есть предел Φ в пространстве $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$."

([23]) К стр. 183:

„Теорема 2. *Пусть E — бэровское пространство и (f_α) — семейство полунепрерывных снизу числовых функций на E, причем $\sup_\alpha f_\alpha(x)$ конечен для каждой точки $x \in E$. Тогда каждое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, на котором семейство (f_α) равномерно ограниченно.*"

([24]) К стр. 208 и 228:

„*9) Показать, что всякий фильтр $\mathfrak{F}$ есть пересечение мажорирующих его ультрафильтров."

([25]) К стр. 211:

„Пусть G — произвольная (замкнутая или незамкнутая) подгруппа группы $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим множество G^* всех точек $\boldsymbol{u} = (u_i) \in \mathbf{R}^n$, для которых число $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ является *целым, какова бы ни была* точка $\boldsymbol{x} = (x_i) \in G$. Ясно, что G^* — *подгруппа* группы $\mathbf{R}^n$...

Предложение 6. *Для каждой подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$ имеем $(G^*)^* = \overline{G}$.*"

([26]) К стр. 211:

„Теорема 2. *Пусть G — замкнутая подгруппа ранга r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ группы $\mathbf{R}^n$. Существует наибольшее векторное под-*

из $\mathfrak{S}$ (т. е. равномерной структурой, фундаментальную систему окружений которой образуют множества $\boldsymbol{W}(A, V)$ (см. предыдущую сноску), где A пробегает всевозможные конечные объединения множеств из $\mathfrak{S}$, а V — фильтр окружений для F). — *Прим. перев.*

*) Равномерная структура простой сходимости на E в $\mathscr{F}(E, F)$, т. е. равномерная структура пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{A}}(E, F)$, где $\mathfrak{A}$ — множество всех конечных подмножеств множества E. — *Прим. перев.*

пространство V, содержащееся в G; для всякого векторного подпространства W, дополнительного к V, $W \cap G$ дискретно и G есть прямая сумма V и $W \cap G$."

„*7) Пусть G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы G была прямой суммой своей замкнутой подгруппы H и некоторой другой замкнутой подгруппы K, необходимо и достаточно, чтобы H была пересечением G с некоторым векторным подпространством."

([27]) К стр. 211:

„*10) Пусть A — кольцо главных идеалов, обладающее бесконечным множеством максимальных идеалов. Показать, что каково бы ни было *бесконечное* множество I, A-модуль A^I *не является свободным модулем.*"

([28]) К стр. 245 и 273:

„*15) Пусть A — замкнутое, а B — компактное множество в топологической группе G. Показать, что AB и BA замкнуты в G."

([29]) К стр. 250:

„*2) Показать, что для того, чтобы отделимое равномерное пространство было предкомпактно, достаточно, чтобы всякая последовательность его точек имела предельную точку."

([30]) К стр. 251:

„12) Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — бесконечное семейство отделимых топологических пространств, ни одно из которых не сводится к одной точке, и a_ι, b_ι для каждого $\iota \in I$ — две различные точки из F_ι.

а) Обозначим через $c_\varkappa$ для каждого $\varkappa \in I$ точку пространства $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$, координата которой с индексом $\varkappa$ равна $b_\varkappa$, а координаты с индексами $\iota \neq \varkappa$ равны a_ι. Показать, что все $c_\varkappa$ являются изолированными точками образованного ими множества C.

б) Вывести из а), что для того, чтобы топология в E имела счетный базис, необходимо и достаточно, чтобы I было счетно и каждое из пространств F_ι имело счетный базис."

([31]) К стр. 296 и 299:

„*10) Пусть $E = \boldsymbol{P}(V)$ и $E' = \boldsymbol{P}(V')$ — два проективных пространства одинаковой конечной размерности $n \geqslant 2$ над телами K и K' соответственно*) и u — взаимно однозначное отображение E на E', пре-

*) $\boldsymbol{P}(V)$ — факторпространство дополнения V^* к $\{0\}$ в векторном пространстве V над K по отношению эквивалентности „в K существует $\lambda \neq 0$ такое, что $y = \lambda x$" между элементами x, $y \in V^*$. — *Прим. перев.*

образующее любую прямолинейную тройку точек в прямолинейную тройку точек. Показать, что существуют изоморфизм σ тела K на K' и полулинейное (относительно σ) взаимно однозначное отображение v пространства V на V' такие, что u есть отображение, получающееся из v при факторизациях *)...“

([32]) К стр. 312:

„*Пусть X и X' — две матрицы из n строк и $p \leqslant n$ столбцов над кольцом A. Для каждого множества $H \subset [1, n]$, состоящего из p элементов, обозначим через X_H* (соотв. X'_H) *минор матрицы X* (соотв. X'), *имеющий H множеством номеров своих строк* (и $[1, p]$ — множеством номеров столбцов). *Тогда*

$$\det\left(({}^tX)X'\right) = \sum_H X_H X'_H, \tag{9}$$

где H пробегает множество всех подмножеств по p элементов из $[1, n]$.“

([33]) К стр. 317:

„8) Показать, что не существует непрерывного отображения f круга $\mathbf{B}_2$ на $\mathbf{S}_1$, которое бы совпадало на $\mathbf{S}_1$ с тождественным отображением.“

([34]) К стр. 383 и 384: определение топологий $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_-$ и $\mathcal{T}_+$ (Общ. топ., гл. I, § 1, упражнение 3).

„3) Пусть E — *совершенно упорядоченное* множество и пусть

1° $\mathfrak{V}_0(x)$ — множество всех множеств из E, содержащих каждое какой-нибудь открытый интервал, которому принадлежит x;

2° $\mathfrak{V}_-(x)$ — множество всех множеств из E, содержащих каждое полуоткрытый интервал вида $]z, x]$ $(z < x)$ или $]\leftarrow, x]$;

3° $\mathfrak{V}_+(x)$ — множество всех множеств из E, содержащих каждое полуоткрытый интервал вида $[x, y[$ $(y > x)$ или $[x, \rightarrow[$.

Показать, что $\mathfrak{V}_0(x)$, $\mathfrak{V}_-(x)$ и $\mathfrak{V}_+(x)$ — множества всех окрестностей точки x соответственно для трех топологий $\mathcal{T}_0(x)$, $\mathcal{T}_-(x)$ и $\mathcal{T}_+(x)$ в E...“

---

*) Переводящих V^* в $\boldsymbol{P}(V)$ и V'^* в $\boldsymbol{P}(V')$ (см. предыдущую сноску). — *Прим. перев.*

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОБЪЯСНЕНИЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ЗАИМСТВОВАННЫХ ИЗ ДРУГИХ КНИГ „ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИКИ" Н. БУРБАКИ

$\varnothing$ — пустое множество.

$\circ$ — символ композиции (отображений, множеств).

$A \circ B$, A^n, A^{-1} — см. Приложение III, *Операции над подмножествами произведения*.

$\mathbf{B}_n$ — шар радиуса 1 с центром 0 в $\mathbf{R}^n$.

$\mathbf{C}$ — тело комплексных чисел, наделенное своей естественной топологией.

$\mathbf{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство.

$\mathbf{C}A$ — дополнение к подмножеству A в рассматриваемом множестве.

E^I — произведение семейства множеств (пространств, групп и т. п.) $E_\iota = E$ с множеством индексов I.

$E^{(I)}$ — прямая сумма векторных пространств $E_\iota = E$ с множеством индексов I, т. е. подпространство произведения E^I, образованное теми его элементами $(x_\iota)_{\iota \in I}$, у которых $x_\iota \neq 0$ лишь для конечного числа индексов ι.

Интервалы в совершенно упорядоченном множестве E:

$[a, b] \equiv \{x \in E: a \leqslant x \leqslant b\}$;
$[a, b[\equiv \{x \in E: a \leqslant x < b\}$;
$]a, b] \equiv \{x \in E: a < x \leqslant b\}$;
$]a, b[\equiv \{x \in E: a < x < b\}$;
$]\leftarrow, a] \equiv \{x \in E: x \leqslant a\}$;
$]\leftarrow, a[\equiv \{x \in E: x < a\}$;
$[a, \rightarrow[\equiv \{x \in E: a \leqslant x\}$;
$]a, \rightarrow[\equiv \{x \in E: a < x\}$;
$]\leftarrow, \rightarrow[\equiv E$.

K_s — тело K, рассматриваемое как левое векторное пространство над самим собой.

K^* — мультипликативная группа ненулевых элементов тела K.

$\mathbf{N}$ — множество всех целых чисел $\geqslant 0$, наделенное своей естественной структурой упорядоченного множества.

$\mathfrak{P}(E)$ — множество всех подмножеств множества E.

$\mathbf{Q}$ — тело рациональных чисел, наделенное своей естественной структурой упорядоченного множества.

$\mathbf{R}$ — тело вещественных чисел, наделенное своими естественными топологией и структурой упорядоченного множества.

$\mathbf{R}_+$ — множество всех вещественных чисел $x \geqslant 0$.

$\mathbf{R}_+^*$ — множество всех вещественных чисел $x > 0$.

$\overline{\mathbf{R}}$ — расширенная прямая (см. Приложение III).

$\mathbf{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство.

$\mathbf{S}_{n-1}$ — сфера радиуса 1 с центром 0 в $\mathbf{R}^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ — сумма сходящегося ряда (x_n) элементов коммутативной отделимой топологической группы.

$\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, наделенное своей естественной структурой упорядоченного множества.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕРМИНОВ, ЗАИМСТВОВАННЫХ ИЗ ДРУГИХ КНИГ „ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИКИ" Н. БУРБАКИ *)

Абсолютно суммируемое семейство: семейство точек нормированного пространства, нормы которых образуют *суммируемое семейство* в $\mathbf{R}$.

Аксиома (O_{III}): Множество всех замкнутых окрестностей любой точки есть фундаментальная система окрестностей этой точки.

Аффинный ранг множества в аффинном пространстве: размерность аффинного подпространства, порожденного этим множеством.

Базис фильтра в множестве E: множество $\mathfrak{B}$ подмножеств множества E, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(B_I) пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{B}$ содержит множество из $\mathfrak{B}$;

(B_{II}) $\mathfrak{B}$ не пусто и пустое подмножество множества E не содержится в $\mathfrak{B}$.

Биективное отображение: взаимно однозначное отображение на (т. е. одновременно *инъективное и сюръективное*).

Близкие порядка V точки: точки x и y *равномерного пространства*, для которых $(x, y) \in V$, где V — его *окружение*.

Бэровское пространство: топологическое пространство, в котором никакое *счетное* объединение замкнутых множеств без внутренних точек не может иметь внутренней точки (т. е. являющееся множеством II категории в себе).

Верхняя грань семейства топологий: слабейшая из топологий в данном множестве, *мажорирующих* все топологии рассматриваемого семейства.

Замыкание отображения f по фильтру $\mathfrak{F}$: множество всех *предельных точек функции f по фильтру $\mathfrak{F}$*.

Индуктивное множество: *упорядоченное множество*, всякое *совершенно упорядоченное* подмножество которого обладает верхней гранью (т. е. верхней границей, мажорируемой любой другой верхней границей).

Инъективное отображение: взаимно однозначное отображение в.

Канонический базис прямой суммы $\mathbf{R}^{(N)}$: множество всех элементов из $\mathbf{R}^{(N)}$, одна компонента которых равна единице, а каждая другая — нулю.

---

*) Курсивом набраны термины, разъясняемые в соответствующих местах этого же Приложения.

Кирпич в $\mathbf{R}^n$: произведение n интервалов.

Класс эквивалентности по *отношению эквивалентности* R в множестве E: определяется любым своим элемеитом x как совокупность тех $y \in E$, для которых справедливо $R\{x, y\}$.

Коммутативно сходящийся ряд: ряд элементов коммутативной *отделимой* топологической группы, сходящийся при любой перестановке его членов.

Компактное $=$ хаусдорфово бикомпактное.

Локально компактное $=$ хаусдорфово локально бикомпактное.

Мажорируемая (мажорирующая) топология: см. *Сравнение топологий.*

Максимальный элемент подмножества X *упорядоченного множества* E: элемент $y \in X$, для которого не существует ни одного элемента $z \in X$ такого, что $z > y$.

Малое порядка V множество в *равномерном пространстве* E: множество, любые две точки которого *близки порядка* V, где V — данное *окружение* для E.

Мера на локально компактном пространстве E: линейная форма μ на векторном пространстве $\mathscr{K}(E)$ всех непрерывных числовых функций на E с *компактным носителем*, удовлетворяющая следующему условию: для каждого компактного множества $K \subset E$ сужение μ на подпространство $\mathscr{K}(E, K)$ тех функций из $\mathscr{K}(E)$, носитель которых содержится в K, непрерывно в *топологии равномерной сходимости*.

Метризуемая равномерная структура: см. *Равномерная структура, определяемая семейством отклонений.*

Множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$: множество, наделенное *структурой*, определяемой заданным в нем *фильтром* $\mathfrak{F}$.

Насыщение подмножества A множества E по *отношению эквивалентности* R в E: объединение *классов эквивалентности* по R всех элементов из A.

Насыщенное множество: совпадающее со своим *насыщением* (по данному *отношению эквивалентности*).

Нижняя грань семейства топологий: сильнейшая из топологий в данном множестве, *мажорируемых* всеми топологиями рассматриваемого семейства.

Носитель меры на *локально компактном* пространстве: дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых сужение этой меры равно нулю.

Огибающая верхняя (нижняя) семейства функций $(f_\iota)_{\iota \in I}$ на миожестве E: функция на E, значение которой в каждой точке $x \in E$ равно $\sup_{\iota \in I} (f_\iota(x))$ (соотв. $\inf_{\iota \in I} (f_\iota(x))$).

Однородное пространство топологической группы G по ее подгруппе H: *факторпространство* G/H пространства G по *отношению эквивалентности* $x^{-1}y \in H$, наделенное законом внешней композиции, относящим каждому элементу $s \in G$ и каждому классу $\dot{x} = xH \in G/H$ класс $s\dot{x} = sxH \in G/H$.

Окрестность точки x: всякое множество, содержащее x в качестве внутренней точки.

Окружение (для) равномерной структуры: см. *Равномерная структура.*

Операции над подмножествами произведения $E \times E$ множества E на себя: A^{-1} — образ $A \subset E \times E$ при канонической симметрии $(x, y) \to (y, x)$ множества E на себя; $B \circ A$ (где $A, B \subset E \times E$) — множество всех тех $(x, z) \in E \times E$, для которых существует $y \in E$ такое, что $(x, y) \in A$ и $(y, z) \in B$. $A^2 = A \circ A$, $A^n = A^{n-1} \circ A = A \circ A^{n-1}$.

Отделимая равномерная структура в множестве E: *равномерная структура*, пересечением всех *окружений* которой служит диагональ Δ произведения $E \times E$.

Отделимое $\equiv$ хаусдорфово.

Отделимое равномерное пространство: *равномерное пространство* с *отделимой равномерной структурой.*

Отклонение на множестве E: отображение f произведения $E \times E$ в $[0, +\infty]$ такое, что $f(x, x) = 0$, $f(y, x) = f(x, y)$ и $f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y)$ для всех $x, y, z \in E$.

Относительно компактное множество: множество с *компактным* замыканием.

Отношение порядка в множестве E: отношение $\omega\{x, y\}$ между двумя общими элементами $x, y \in E$, удовлетворяющее условиям: а) отношение „$\omega\{x, y\}$ и $\omega\{y, z\}$“ влечет $\omega\{x, z\}$; б) отношение „$\omega\{x, y\}$ и $\omega\{y, x\}$“ влечет $x = y$. Часто записывается в виде $x \leqslant y$.

Отношение эквивалентности в множестве E: отношение $R\{x, y\}$ между двумя общими элементами $x, y \in E$, удовлетворяющее условиям: а) $R\{x, x\}$ для всех $x \in E$ (рефлексивность); б) $R\{x, y\}$ и $R\{y, x\}$ равносильны (симметричность); в) отношение „$R\{x, y\}$ и $R\{y, z\}$“ влечет $R\{x, z\}$ (транзитивность). Определяет разбиение E на *классы эквивалентности.*

p-адическая равномерная структура в $\mathbf{Z}$: *равномерная структура* в $\mathbf{Z}$, *фундаментальную систему окружений* которой образуют множества W_n пар $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, для которых $|x - y|_p \leqslant p^{-n}$, причем $|0|_p = 0$ и $|x|_p = p^{-\rho}$ при $x \neq 0$, где ρ — показатель наивысшей степени простого числа p, на которую делится x.

Полная аддитивная топологическая группа: аддитивная топологическая группа, которая в *равномерной структуре, порождаемой топологией* этой группы, является *полным равномерным пространством.*

Полное равномерное пространство: *равномерное пространство*, в котором каждый *фильтр Коши* сходится.

Полное топологическое тело: топологическое тело, являющееся *полной аддитивной топологической группой*.

Пополнение отделимого равномерного пространства E: *отделимое полное равномерное пространство* $\hat{E}$, содержащее всюду плотное равномерное подпространство, изоморфное E. $\hat{E}$ всегда существует и определено однозначно с точностью до изоморфизма.

Пополнение отделимой аддитивной топологической группы G: отделимая *полная аддитивная топологическая группа* $\hat{G}$, содержащая всюду плотную подгруппу, изоморфную G. $\hat{G}$ всегда существует и определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Последовательность Коши: бесконечная последовательность (u_n) точек *равномерного пространства*, удовлетворяющая следующему условию: для всякого *окружения* V этого пространства существует целое n_0 такое, что u_m и u_n *близки порядка* V при любых $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$.

Правильная функция: функция на интервале $I \subset \mathbf{R}$ со значениями в полном вещественном нормированном пространстве, являющаяся на каждой компактной части этого интервала равномерным пределом кусочно-постоянных функций.

Предел базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в топологическом пространстве: точка, каждая *окрестность* которой содержит множество из $\mathfrak{B}$.

Предел фильтра: см. *Предел базиса фильтра*.

Предел функции f (отображающей множество E в топологическое пространство E') **по фильтру** $\mathfrak{F}$ в E: *предел базиса фильтра* $f(\mathfrak{F})$ в E'.

Предельная точка функции f **по фильтру** $\mathfrak{F}$: *точка прикосновения базиса фильтра* $f(\mathfrak{F})$.

Предкомпактное равномерное пространство: *отделимое равномерное пространство, пополнение* которого *компактно*; может быть определено также как отделимое равномерное пространство E, для всякого *окружения* V которого существует покрытие E множествами, *малыми порядка* V.

Принцип продолжения тождеств: Если f и g — непрерывные отображения топологического пространства E в отделимое топологическое пространство E' и $f(x) = g(x)$ на множестве A, всюду плотном в E, то $f = g$.

Произведение топологий пространств F_ι: топология произведения этих пространств, т. е. слабейшая из тех топологий в произведении $\prod F_\iota$ множеств F_ι, в которых проекции на все F_ι непрерывны.

Прообраз топологии $\mathfrak{F}'$ пространства E' относительно отображения f множества E в E': топология в E, открытыми множествами которой служат прообразы открытых множеств из E' относительно f и только они.

Противоположное тело: тело K°, получаемое из тела K путем замены закона умножения $(x, y) \to x \cdot y$ противоположным законом умножения $(x, y) \to y \cdot x$.

Равномерная структура в множестве E: *структура*, определяемая в E множеством $\mathfrak{F}$ подмножеств произведения $E \times E$, удовлетворяющим следующим условиям:

1° каковы бы ни были $x \in E$ и $V \in \mathfrak{F}$, x и x *близки порядка* V;

2° пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{F}$ содержит множество из $\mathfrak{F}$;

3° каково бы ни было $V \in \mathfrak{F}$, существует $V' \in \mathfrak{F}$ такое, что если x и y близки порядка V', то y и x близки порядка V;

4° каково бы ни было $V \in \mathfrak{F}$, существует $W \in \mathfrak{F}$ такое, что если как x и z, так z и y близки порядка W, то x и y близки порядка V.

$\mathfrak{F}$ есть *базис фильтра* $\mathfrak{U}$ в $E \times E$, называемого фильтром окружений рассматриваемой равномерной структуры, а множества $U \in \mathfrak{U}$ называются окружениями этой структуры. Фильтр окружений $\mathfrak{U}$ удовлетворяет трем аксиомам, формулируемым в терминах *операций над подмножествами произведения* следующим образом:

(U_I) Всякое множество из $\mathfrak{U}$ содержит диагональ Δ произведения $E \times E$.

(U_{II}) $V \in \mathfrak{U}$ влечет $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(U_{III}) Каково бы ни было $V \in \mathfrak{U}$, существует $W \in \mathfrak{U}$ такое, что $W \circ W \subset V$.

Равномерная структура, определяемая семейством отклонений: *равномерная структура* на множестве E, *фундаментальную систему окружений* которой образуют множества

$$\{(x, y) \in E \times E: f_{\iota_k}(x, y) < a_k \ (1 \leqslant k \leqslant n)\},$$

где $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — заданное семейство *отклонений* на E, $(\iota_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — произвольные конечные семейства индексов из I и $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — произвольные конечные семейства чисел > 0. Равномерная структура, определяемая семейством, образованным одним *расстоянием*, называется метризуемой равномерной структурой.

Равномерная структура, порождаемая топологией аддитивной топологической группы G: *равномерная структура* в G, *фундаментальную систему окружений* которой образуют множества всех пар (x, y) таких, что $x - y \in V$, где V — любые *окрестности* нуля.

Равномерное пространство: множество, наделенное *равномерной структурой* и *топологией*, *порождаемой* этой *равномерной структурой*.

Равномерно непрерывное отображение: отображение f *равномерного пространства* E в равномерное пространство E', удовлетворяющее следующему условию: каково бы ни было *окружение* V' для E', существует окружение V для E такое, что если $(x, y) \in V$, то $(f(x), f(y)) \in V'$.

Разбиение единицы: семейство $(f_\iota)_{\iota\in I}$ конечных числовых функций на топологическом пространстве E, удовлетворяющее следующим двум требованиям: а) каждая точка $x\in E$ обладает *окрестностью*, на которой отлично от нуля лишь конечное число функций семейства; б) $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x)=1$ для каждой точки $x\in E$.

Ранг подгруппы группы $\mathbf{R}^n$: размерность порождаемого ею подпространства.

Расстояние: *отклонение* d на множестве E, принимающее лишь конечные значения и такое, что $d(x, y)=0$ влечет $x=y$.

Расширенная прямая $\overline{\mathbf{R}}$: множество, полученное путем присоединения к $\mathbf{R}$ элементов $-\infty$ и $+\infty$, с естественно распространенными на него порядком и топологией.

Свободное семейство элементов векторного пространства: каждое конечное подсемейство которого линейно независимо.

Свободный модуль: модуль с базисом.

Сечение множества E, *фильтрующегося вправо* по *отношению порядка* (σ), относительно элемента $a\in E$: множество всех $x\in E$ таких, что $a\,(\sigma)\,x$.

Симметричное окружение: *окружение* V *равномерной структуры* в множестве E, удовлетворяющее условию $V=\overset{-1}{V}$ (т. е. симметричное относительно диагонали Δ произведения $E\times E$).

След множества $X\subset E$ на множестве $A\subset E$: множество $X_A=X\cap A$, рассматриваемое как подмножество множества A.

След множества $\mathfrak{E}$ подмножеств множества E на множестве $A\subset E$: множество $\mathfrak{E}_A$ *следов множеств* из $\mathfrak{E}$ на A.

Совершенно упорядоченное множество: *упорядоченное множество*, любые два элемента x, y которого связаны отношением $x\leqslant y$ или $y\leqslant x$.

Сравнение равномерных структур $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ в одном и том же множестве: $\mathcal{U}_2$ мажорирует $\mathcal{U}_1$, если *фильтр окружений* структуры $\mathcal{U}_1$ содержится в фильтре окружений структуры $\mathcal{U}_2$; $\mathcal{U}_2$ сильнее чем $\mathcal{U}_1$ (и $\mathcal{U}_1$ слабее чем $\mathcal{U}_2$), если $\mathcal{U}_2$ мажорирует $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2\neq\mathcal{U}_1$.

Сравнение топологий $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, заданных в одном и том же множестве: $\mathcal{T}_2$ мажорирует $\mathcal{T}_1$, если каждое множество, открытое в $\mathcal{T}_1$, открыто в $\mathcal{T}_2$; $\mathcal{T}_2$ сильнее чем $\mathcal{T}_1$ (и $\mathcal{T}_1$ слабее чем $\mathcal{T}_2$), если $\mathcal{T}_2$ мажорирует $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2\neq\mathcal{T}_1$.

Сравнимые равномерные структуры: две *равномерные структуры* в одном и том же множестве, одна из которых мажорирует другую (см. *Сравнение равномерных структур*).

Сравнимые топологии: две топологии в одном и том же множестве, одна из которых мажорирует другую (см. *Сравнение топологий*).

Срез миожества $K\subset E\times F$ по элементу $x\in E$: множество тех $y\in F$, для которых $(x, y)\in K$.

Структура: см. Н. Бурбаки, Общая топология, Основные структуры, Приложение (Сводка результатов книги I „Теория множеств“, § 8).

Суммируемое семейство с суммой s: семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ точек коммутативной отделимой топологической группы, обладающее следующим свойством: для любой *окрестности* V начала существует конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что $s_J = \sum_{\iota \in J} x_\iota \in s + V$ для всех конечных множеств $J \supset J_0$ из I.

Сходимость по фильтру: см. *Предел функции по фильтру*.

Сходящийся фильтр: см. *Предел фильтра*.

Счетное множество: равномощное части множества **N** всех целых чисел $\geqslant 0$.

Сюръективное отображение: отображение на.

Теорема Бэра: Полное метрическое пространство есть *бэровское пространство*.

Теорема Цорна: Всякое *индуктивное множество* обладает по крайней мере одним *максимальным элементом*.

Топология компактной сходимости: *топология равномерной сходимости* на множестве всех *компактных* подмножеств.

Топология, порождаемая равномерной структурой в множестве E: топология, в которой *фильтром окрестностей* произвольной точки $x_0 \in E$ служит совокупность множеств $V(x_0)$, где V пробегает *фильтр окружений* данной *равномерной структуры*, а $V(x_0)$ есть множество всех $x \in E$ таких, что x и x_0 *близки порядка* V.

Топология простой сходимости: *топология равномерной сходимости* на множестве всех конечных подмножеств.

Топология равномерной сходимости на множестве E: *топология равномерной сходимости* на множестве подмножеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(E)$, состоящем из одного E.

Топология равномерной сходимости на множестве подмножеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(E)$: *топология, порождаемая равномерной структурой* в пространстве $\mathfrak{Q}(E, F)$ отображений множества E в *равномерное пространство* F, *фундаментальную систему окружений* которой образуют множества $\{(u, v) \in \mathfrak{Q}(E, F) \times \mathfrak{Q}(E, F)\colon (u(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in A\}$, где A пробегает $\mathfrak{S}$, а V — *фильтр окружений* для пространства F.

Точка прикосновения базиса фильтра в топологическом пространстве: точка прикосновения каждого множества из *базиса фильтра*.

Ультрафильтр: *фильтр*, не содержащийся ни в каком другом фильтре, заданном в том же множестве.

Унитарный A-модуль: модуль E над кольцом A с единицей ε, такой, что $\varepsilon x = x$ для всех $x \in E$.

Упорядоченное множество: множество, наделенное *отношением порядка*.

Факторпространство топологического пространства E по *отношению эквивалентности* R: множество E/R, наделенное *фактортопологией*.

Факторразмерность векторного подпространства V векторного пространства E: размерность факторпространства E/V.

Фактортопология в множестве E/R *классов эквивалентности* по *отношению эквивалентности* R в множестве E: сильнейшая из топологий (см. *Сравнение топологий*), при которых каноническое отображение E на E/R (относящее каждой точке из E ее класс эквивалентности в E/R) непрерывно.

Фильтр в множестве E: множество $\mathfrak{F}$ подмножеств множества E, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(F_I) Всякое подмножество множества E, содержащее множество из $\mathfrak{F}$, принадлежит $\mathfrak{F}$.

(F_{II}) Пересечение любого конечного числа множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

(F_{III}) Пустое подмножество множества E не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Фильтр Коши в *равномерном пространстве* E: *фильтр* $\mathfrak{F}$, содержащий сколь угодно малые множества, т. е. такой, что для любого *окружения* V существует $A \in \mathfrak{F}$, всякие две точки которого *близки порядка* V.

Фильтр окружений равномерной структуры: см. *Равномерная структура*.

Фильтр, порождаемый базисом фильтра $\mathfrak{B}$ в множестве E: множество всех подмножеств множества E, в каждом из которых содержится множество из *базиса фильтра* $\mathfrak{B}$.

Фильтр сечений множества E, *фильтрующегося вправо* по *отношению порядка* (σ): *фильтр*, *порождаемый базисом фильтра* $\mathfrak{S}$, образованным всевозможными *сечениями* множества E.

Фильтрующееся вправо (влево) множество E: *упорядоченное множество*, каждое непустое конечное подмножество которого имеет в E верхнюю (нижнюю) границу.

Фундаментальная система окружений: *базис фильтра окружений* данной *равномерной структуры*.

Элементарное множество в произведении $\prod_\iota F_\iota$ топологических пространств F_ι: множество вида $\prod_\iota A_\iota$, где каждое A_ι — открытое подмножество пространства F_ι и $A_\iota = F_\iota$ для всех индексов ι, кроме конечного их числа.

Элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью (x_n) элементов множества E: множество всех множеств $X \subset E$ таких, что $x_n \in X$ для всех значений n, кроме конечного их числа.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

	Гл.	§	n°
$\lvert\xi\rvert$, $\lVert x\rVert$	I	1	2
$\mathscr{B}_K(I)$, $L^\infty_K(I)$, $L^1_K(I)$, $\mathscr{B}(I)$, $L^1(I)$	I	1	2
$\mathbf{T}_0(M, V)$, $\mathbf{T}(M, V)$	III	3	1
$L(E, F)$, $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ (E, F — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств пространства E)	III	3	1
$u_{x\cdot}$, $u_{\cdot y}$	III	4	1
$\langle y, z\rangle$	IV	1	1
$\sigma(F, G)$ (F, G — векторные пространства в двойственности)	IV	1	2
M°, $M^{\circ\circ}$	IV	1	3
$\tau(F, G)$ (F, G — векторные пространства в двойственности)	IV	2	3
E' (E — отделимое локально выпуклое пространство)	IV	2	1
E'' (E — отделимое локально выпуклое пространство)	IV	3	3
${}^t u$ (u — непрерывное линейное отображение)	IV	4	1
$(x \mid y)$	V	1	3
$\bigoplus_{\iota\in I} E_\iota$, $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ (E_ι, E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — гильбертовы пространства)	V	2	1
$L^2_K(I)$	V	2	4

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ *)

	Гл.	§	n°
Алгебраический базис предгильбертова пространства	V	2	3
Алгебраическое дополнение подпространства	I	1	8
— *сопряженное*	IV	1	1
Ассоциированная невырожденная эрмитова форма	V	1	1
Ассоциированное отделимое топологическое векторное пространство	I	1	6
Базис алгебраический предгильбертова пространства	V	2	3
— *ортонормальный*	V	2	3
	P	7	25
Базисное топологическое векторное пространство	I	1	1
	P	1	1
Банаха теоремы	I	3	3
	IV	2	5
	IV	2	6
Банаховское пространство	I	1	5
	P	7	14
Бесселя неравенство	V	2	3
	P	7	25
Билинейная форма, приводящая векторные пространства в двойственность	IV	2	1
	P	6	1
Билинейное отображение раздельно непрерывное	III	4	1
	P	2	9
Билинейное отображение — — $\mathfrak{S}$-*гипонепрерывное*	III	4	2
	P	2	10
— — ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$)-*гипонепрерывное*	III	4	2
	P	2	11
Бочка	III	1	1
	P	7	1
Бочечное пространство	III	1	1
	P	7	2
Векторные пространства в двойственности	IV	1	1
	P	6	1
Вершина конуса	II	1	4
	P	4	18
Вещественная линейная форма	II	6	1
Вещественное линейное многообразие	II	6	1
— *локально выпуклое пространство*	II	2	1
— *топологическое векторное пространство*	P	1	1
Внешняя гильбертова сумма	V	2	1
	P	3	18
Второе сопряженное	IV	3	3
	P	6	15
Выпуклая оболочка множества	II	1	3
	P	4	4
— *функция*	II	5	1
	P	4	16
Выпуклое множество	II	1	1
	II	6	2
	P	4	1

*) „P“ означает ссылку на „Сводку результатов“.

Выпуклое тело . . . . . II 3 2
Р 4 3
Выступающий конус . . . II 1 4
Р 4 18

Гильбертова размерность V 2 4
Р 7 27
— *сумма* подпространств V 2 2
Р 3 19
— — *внешняя* . . . . . V 2 1
Р 3 18
Гильбертово пространство V 1 3
Р 7 22
Гиперплоскость опорная множества . . . . . II 3 2
Р 4 10
$\mathfrak{S}$-гипонепрерывное билинейное отображение . . III 4 2
Р 2 10
$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывное билинейное отображение III 4 2
Р 2 11
Гомоморфизм . . . . . Р 2 7

Диск . . . . . I 1 3
Дополнение алгебраическое . . . . . I 1 8
— *ортогональное* . . . . IV 1 4
V 1 5
Р 7 24
— *топологическое* . . . I 1 8
Р 3 10
Дуальное предгильбертово пространство . . . . . V 1 3

Закругленная выпуклая оболочка множества . . . II 6 2
Закругленное множество I 1 3
Замкнутая выпуклая оболочка множества . . . . II 1 6
Р 4 5
— *закругленная выпуклая оболочка* множества II 6 2
— *уравновешенная выпуклая оболочка* множества . . . . . II 6 2
Замкнутое векторное подпространство, порожденное множеством . . . . . Р 3 3
Замкнутые полупространства, определяемые замкнутой гиперплоскостью II 1 6
Заостренный конус . . . . II 1 4
Р 4 18
Затупленный конус . . . II 1 4
Р 4 18

Изоморфизм топологического векторного пространства на топологическое векторное пространство . . . . . I 1 1
Индуктивный предел локально выпуклых топологий . . . . . II 2 4
Р 3 15
— — *строгий локально выпуклых пространств* II 2 5
Р 3 16
Исходная топология локально выпуклого пространства . . . . . IV 2 1

Калибровочная функция II 5 3
Каноническое отображение E в E'' . . . . . IV 3 3
— — *E_χ в* $\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ . . . . . V 2 1
Квадрат скалярный . . . . V 1 3
Квазиполное пространство III 2 5
Р 1 16
Компактная сходимость III 3 1
Р 5 2
Комплексная линейная форма . . . . . II 6 1
Комплексное линейное многообразие . . . . . II 6 1
— *локально выпуклое пространство* . . . . . II 6 2
— *топологическое векторное пространство* Р 1 1
Конус . . . . . II 1 4
Р 4 18

Конус выпуклый, порожденный множеством . . II 1 4
— выступающий . . . . II 1 4, Р 4 18
— заостренный . . . . . II 1 4, Р 4 18
— затупленный . . . . II 1 4, Р 4 18
Координаты относительно ортонормального базиса V 2 3
Коши — Буняковского неравенство . . . . . V 1 2, Р 7 20
Крейна — Мильмана теорема . . . . . II 4 2, Р 4 13

Левое обратное линейного отображения . . . . . I 1 8, Р 3 12
Линейная форма вещественная . . . . . II 6 1
— — комплексная . . . II 6 1
— — положительная II 1 5
Линейное многообразие вещественное . . . . . II 6 1
— — комплексное . . . II 6 1
Локально выпуклая топология . . . . . II 2 1, II 6 2
Локально выпуклое пространство вещественное II 2 1, Р 1 7
— — — комплексное . . II 6 2, Р 1 7

Макки теоремы . . . . . IV 2 3, IV 2 4, Р 6 11
— топология . . . . . IV 2 3, Р 6 11
Маркова — Какутани теорема . . . . . II Прил.
Метризуемое топологическое векторное пространство . . . . . I 3 1
Многообразие линейное вещественное . . . . . II 6 1
— — комплексное . . . II 6 1
Многообразие опорное выпуклого множества . . . . II 4 2
Множества ортогональные . . . . . II 1 4, V 1 5
— отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью II 3 2, Р 4 8
— строго отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью . . . . . II 3 2, Р 4 8
Множество выпуклое . . . II 1 1, II 6 2, Р 4 1
— закругленное . . . . I 1 3
— ограниченное . . . . . III 2 1, Р 1 10
— ортонормальное . . . V 2 3
— поглощающее . . . . I 1 3, Р 1 3
— полунорм фильтрующееся . . . . . II 5 4, Р 1 8
— равностепенно $\mathfrak{S}$-гипонепрерывное . . . . . III 4 5
— раздельно равностепенно непрерывное . . . III 4 5
— равностепенно $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-гипонепрерывное . . . . III 4 5
— топологически свободное . . . . . I 2 1, Р 3 4
— тотальное . . . . . I 2 1, Р 3 3
— уравновешенное . . . I 1 3, Р 1 3
Монтелевское пространство . . . . . IV 3 4, Р 7 7

Невырожденная (полуторалинейная) эрмитова форма . . . . . V 1 1
P 7 20

Невырожденная (полуторалинейная) эрмитова форма ассоциированная V 1 1

— — — — *положительная* . . . . . V 1 2
P 7 20

Неравенство Бесселя . . . V 2 3
P 7 25

— *Коши — Буняковского* V 1 2
P 7 20

Норма . . . . . I 1 2
P 1 8

— *непрерывного линейного отображения* . . . P 2 1

Нормированное пространство . . . . . I 1 2
P 1 9

Оболочка множества выпуклая . . . . . II 1 3
P 4 4

— — — *закругленная* II 6 2

— — — *замкнутая* . . II 1 6
P 4 5

— — — — *уравновешенная* . . . . . II 6 2

— — *уравновешенная* . . I 1 3
P 1 3

Обратимое слева (справа) линейное отображение I 1 8
P 3 12

Ограниченная сходимость III 3 1
P 5 2

Ограниченное множество III 2 1
P 1 10

Ограниченных множеств фундаментальная система . . . . . III 2 2
P 1 10

Опорная гиперплоскость множества . . . . . II 3 2
P 4 10

Опорное многообразие выпуклого множества . . . II 4 2

Ортогональное дополнение IV 1 4
V 1 5
P 7 24

— *подпространство* . . IV 1 4
P 6 6
V 1 5

Ортогональные векторы V 1 3

— *множества* . . . . . IV 1 4
V 1 5

Ортогональный проектор V 1 5
P 3 11

Ортонормализация последовательности векторов V 2 4

Ортонормальное множество . . . . . V 2 3

— *семейство* . . . . . V 2 3
P 7 25

Ортонормальный базис . . V 2 3
P 7 25

Ослабленная топология IV 2 1
P 6 3

Отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью множества . . . . . II 3 2
P 4 8

Открытые полупространства, определяемые замкнутой гиперплоскостью II 1 6

Парсеваля равенство . . . V 1 3

Поглощающее множество I 1 3
P 1 3

Поглощение множества множеством . . . . . I 1 3
P 1 3

Подпространство ортогональное . . . . . IV 1 4
P 6 6
V 1 5

— *топологическое векторное* . . . . . P 3 1

Полное топологическое векторное пространство I 1 5

Положительная линейная форма . . . . . II 1 5

— (*полуторалинейная*)

эрмитова форма . . . . V 1 2
P 7 20
— — — — *невырожденная* . . . . . V 1 2
P 7 20
Положительно однородная функция . . . . . II 5 3
Полунорма . . . . . II 5 3
II 6 2
P 1 8
Полупространства, определяемые замкнутой гиперплоскостью . . . . . II 1 6
Полурефлексивное пространство . . . . . IV 3 3
P 6 15
Полуторалинейная эрмитова форма . . . . . V 1 1
P 7 20
— — — *положительная* V 1 2
P 7 20
— — — — *невырожденная* . . . . . V 1 2
P 7 20
Поляра множества . . . . IV 1 3
P 6 4
По одну сторону от гиперплоскости . . . . . II 1 1
Пополнение отделимого топологического векторного пространства . . . . . I 1 5
P 1 5
Правое обратное линейного отображения . . . . . I 1 8
P 3 12
Предгильбертово пространство . . . . . V 1 3
P 7 21
— — *дуальное* . . . . . V 1 3
Проектор . . . . . I 1 8
V 1 5
P 3 9
— *ортогональный* . . . V 1 5
P 3 11
Проекция на выпуклое множество в предгильбертовом пространстве . . . . V 1 4
P 4 14
Произведение скалярное . . V 1 3
P 7 21
— *топологических векторных пространств* . . P 3 6
Простая сходимость . . . III 3 1
P 5 2
Пространства векторные в двойственности . . . . IV 1 1
P 6 1
Пространство базисное . . I 1 1
P 1 1
— *банаховское* . . . . . I 1 5
P 7 14
— *бочечное* . . . . . III 1 1
P 7 2
— *гильбертово* . . . . . V 1 3
P 7 22
— *квазиполное* . . . . . III 2 5
P 1 16
— *локально выпуклое вещественное* . . . . . II 2 1
P 1 7
— — — *комплексное* . . II 6 2
P 1 7
— *монтелевское* . . . . IV 3 4
P 7 7
— *нормированное* . . . . I 1 2
P 1 9
— *отделимое ассоциированное* . . . . . I 1 6
— *полурефлексивное* . . IV 3 3
P 6 15
— *предгильбертово* . . . V 1 3
P 7 21
— — *дуальное* . . . . . V 1 3
— *рефлексивное* . . . . . IV 3 3
P 6 15
— *топологическое векторное* . . . . . I 1 1
P 1 1
— — — *метризуемое* . . I 3 1
— — — *полученное расширением тела скаляров до* **C** . . . . . II 6 1

Пространство упорядоченное векторное . . . . II 1 5
P 4 20
— Фреше . . . . . II 2 1
II 6 2
P 7 10
Прямая сумма локально выпуклых топологий . . II 2 3
— — топологическая конечного числа топологических векторных пространств . . . . . I 1 8
P 3 8
— — — локально выпуклых пространств . . . . . II 2 3
P 3 17
Равенство Парсеваля . . . V 1 3
Равностепенно $\mathfrak{S}$*-гипонепрерывное множество* III 4 5
— ($\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$)*-гипонепрерывное множество* . . . . . III 4 5
Раздельно непрерывное билинейное отображение III 4 1
P 2 9
— равностепенно непрерывное множество билинейных отображений . . III 4 5
Размерность выпуклого множества . . . . . II 1 3
— гильбертова . . . . . V 2 4
P 7 27
Рефлексивное пространство . . . . . IV 3 3
P 6 15
Сильная топология . . . . IV 3 1
P 5 1
P 6 13
Сильное сопряженное . . . IV 3 1
P 6 13
Симметричная билинейная форма . . . . . V 1 1
Скалярное произведение V 1 3
P 7 21
Скалярный квадрат . . . V 1 3
Слабая топология . . . . IV 1 2
IV 2 1
P 5 1
P 6 2
P 6 3
Слабое сопряженное . . . IV 2 1
Согласующаяся с двойственностью топология IV 2 3
P 6 9
Согласующиеся структура векторного пространства и топология . . . I 1 1
P 1 1
Сопряженное алгебраическое . . . . . IV 1 1
— второе . . . . . IV 3 3
P 6 15
— отображение . . . . IV 4 1
P 6 16
— пространство . . . . IV 1 1
P 5
— сильное . . . . . IV 3 1
P 6 13
— слабое . . . . . IV 2 1
— топологическое . . . IV 1 1
P 5
Строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств . . . . . II 2 5
P 3 16
Строго выпуклая функция II 5 1
P 4 16
— отделяющиеся замкнутой гиперплоскостью множества . . . . . II 3 2
P 4 8
Строго по одну сторону от гиперплоскости . . . II 1 1
Сумма гильбертова . . . . V 2 2
P 3 19
— — внешняя . . . . . V 2 1
P 3 18
— прямая локально выпуклых топологий . . . II 2 3
Сходимость компактная III 3 1
P 5 2

Сходимость ограниченная III 3 1
Р 5 2
— *простая* . . . . . III 3 1
Р 5 2
Тело выпуклое . . . . . II 3 2
Р 4 3
Теорема Банаха — Штейнгауза . . . . . III 3 6
Р 5 12
Теорема Крейна — Мильмана . . . . . II 4 2
Р 4 13
— *Маркова — Какутани* . . . . . II Прил.
— *о замкнутом графике* I 3 3
Р 2 6
— *Хана — Банаха* . . . . II 3 1
II 5 7
II 6 3
Р 2 4
Р 4 7
Теоремы Банаха . . . . . I 3 3
IV 2 5
IV 2 6
— *Макки* . . . . . IV 2 3
IV 2 4
Р 6 11
Топологическая прямая сумма конечного числа топологических векторных пространств . . . . . I 1 8
Р 3 8
— — — локально выпуклых пространств . . . . . II 2 3
Р 3 17
Топологически свободное множество . . . . . I 2 1
Р 3 4
Топологическое векторное подпространство . . . . Р 3 1
— — *пространство* . . . I 1 1
Р 1 1
— — — *базисное* . . . . I 1 1
Р 1 1
— — — *вещественное* . . Р 1 1
Топологическое векторное подпространство комплексное . . . . . Р 1 1
— — — *метризуемое* . . I 3 1
— — *факторпространство* . . . . . Р 3 5
— *дополнение* подпространства . . . . . I 1 8
Р 3 10
— *сопряженное* . . . . . IV 1 1
Р 5
$\mathfrak{S}$-*топология* . . . . . III 3 1
Р 5 1
Топология исходная . . . IV 2 1
— *компактной сходимости* . . . . . III 3 1
Р 5 2
— *локально выпуклая* II 2 1
II 6 2
— *Макки* . . . . . IV 2 3
Р 6 11
— *ограниченной сходимости* . . . . . III 3 1
Р 5 2
— *ослабленная* . . . . . IV 2 1
Р 6 3
— *определяемая множеством полунорм* . . . . II 5 4
II 6 2
Р 1 8
— *простой сходимости* III 3 1
Р 5 2
— *сильная* . . . . . IV 3 1
Р 5 1
Р 6 13
— *слабая* . . . . . IV 1 2
IV 2 1
Р 5 1
Р 6 2
Р 6 3
— *согласующаяся с двойственностью* . . . . . IV 2 3
Р 6 9
— — *со структурой векторного пространства* . . . . . I 1 1
Р 1 1

Тотальное множество . . . I 2 1
Р 3 3

Упорядоченное векторное пространство . . . . . II 1 5
Р 4 20

Уравновешенная оболочка множества . . . . . I 1 3
Р 1 3

Уравновешенное множество . . . . . I 1 3
Р 1 3

Факторпространство топологического векторного пространства . . . . . Р 3 5

Фильтрующееся множество полунорм . . . . . II 5 4
Р 1 8

Форма билинейная, приводящая векторные пространства в двойственность . . . . . IV 2 1
Р 6 1

— *линейная вещественная* . . . . . II 6 1
— — *комплексная* . . . II 6 1
— — *положительная* . . II 1 5
— (*полуторалинейная*) *эрмитова* . . . . . V 1 1
Р 7 20
— — — *невырожденная* V 1 1
— — — — *ассоциированная* . . . . . V 1 1
— — — *положительная* V 1 2
Р 7 20
— — — — *невырожденная* . . . . . V 1 2
Р 7 20
— *симметричная* . . . . V 1 1

Фреше пространство . . . II 2 1
II 6 2
Р 7 10

Фундаментальная система ограниченных множеств III 2 2
Р 1 10

Функция выпуклая . . . . II 5 1
Р 4 16
— *положительно однородная* . . . . . II 5 3
— *строго выпуклая* . . . II 5 1
Р 4 16

Хана — Банаха теорема II 3 1
II 5 7
II 6 3
Р 2 4
Р 4 7

Экстремальная образующая выпуклого конуса II 4 2
Р 4 21

Экстремальная точка выпуклого множества . . . II 4 2
Р 4 13

Эрмитова (*полуторалинейная*) *форма* . . . . . V 1 1
Р 7 20
— — — *невырожденная* V 1 1
— — — — *ассоциированная* . . . . . V 1 1
— — — *положительная* V 1 2
Р 7 20
— — — — *невырожденная* . . . . . V 1 2
Р 7 20

Редактор *О. О. САВКО*
Художник *В. А. Селенгинский*
Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 13/X 1958 г.
Подписано к печати 19/V 1959 г. Бумага 60×92¹/₁₆=13,6 бум. л. 27,2 печ. л. в т/ч 5 вкл. Уч.-изд. л. 26,0. Изд. № 1/3638. Цена 15 р. Зак. 3578.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ГЛАВЫ I

Определение топологического векторного пространства:

Пусть дано топологическое тело K. *Топологическим левым векторным пространством над* K называется множество E, наделенное:

1° структурой левого векторного пространства над K;

2° топологией, в которой отображение $(x, y) \to x + y$ произведения $E \times E$ в E и отображение $(\lambda, x) \to \lambda x$ произведения $K \times E$ в E непрерывны.

Уравновешенные множества; *поглощающие множества*:

Пусть K — недискретное нормированное тело и E — левое векторное пространство над K. Множество $M \subset E$ называется *уравновешенным* (или *диском*, если $K = \mathbf{C}$), если $\lambda x \in M$ для каждого $x \in M$ и каждого $\lambda \in K$ с $|\lambda| \leqslant 1$.

Пусть A и B — два подмножества пространства E. Говорят, что A *поглощает* B, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda A \supset B$, когда $|\lambda| \geqslant \alpha$. Множество $A \subset E$ называется *поглощающим*, если оно поглощает каждое одноточечное множество.

Аксиомы окрестностей в топологическом векторном пространстве над недискретным нормированным телом:

В топологическом векторном пространстве E над *недискретным* нормированным телом K существует фундаментальная система $\mathfrak{V}$ замкнутых окрестностей нуля такая, что:

($\mathrm{EV_I}$) Каждое множество $V \in \mathfrak{V}$ — уравновешенное и поглощающее.

($\mathrm{EV_{II}}$) Каковы бы ни были $V \in \mathfrak{V}$ и $\lambda \neq 0$ из K, $\lambda V \in \mathfrak{V}$.

($\mathrm{EV_{III}}$) Для каждого $V \in \mathfrak{V}$ существует $W \in \mathfrak{V}$ такое, что $W + W \subset V$.

Обратно, пусть E — векторное пространство над K и $\mathfrak{V}$ — базис фильтра в E, удовлетворяющий условиям ($\mathrm{EV_I}$), ($\mathrm{EV_{II}}$) и ($\mathrm{EV_{III}}$). Тогда существует однозначно определенная топология в E, согласующаяся со структурой векторного пространства в E и имеющая $\mathfrak{V}$ фундаментальной системой окрестностей нуля.

Нормированные пространства:

Пусть E — левое векторное пространство над *недискретным* нормированным телом K. *Нормой* на E называется такое отображение $x \to \|x\|$ пространства E в $\mathbf{R}_+$, что из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для всех $\lambda \in K$ и $x \in E$ и $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x \in E$ и $y \in E$. Векторное пространство E, наделенное нормой $\|x\|$ и топологией, определяемой расстоянием $\|x - y\|$, называется *нормированным пространством*. *Вещественным* (соотв. *комплексным*) *банаховским про-*

странством называется *полное* нормированное пространство над телом $\mathbf{R}$ (соотв. C).

Топологическая прямая сумма подпространств:

Топологическое векторное пространство E называется *топологической прямой суммой* конечного семейства $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ своих векторных подпространств, если отображение $(x_i) \to \sum_i x_i$ произведения $\prod_i M_i$ в E есть изоморфизм $\prod_i M_i$ *на* E.

Векторное подпространство N пространства E называется *топологическим дополнением* к векторному подпространству M, если E есть топологическая прямая сумма M и N.

Тотальное подмножество топологического векторного пространства:

Подмножество A топологического векторного пространства E называется *тотальным*, если порождаемое им векторное пространство (множество всевозможных линейных комбинаций элементов из A) всюду плотно в E.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ II

Определение выпуклого множества:

Подмножество A векториого пространства E над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется *выпуклым*, если каковы бы ни были точки x, $y \in A$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ для всех λ таких, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Выпуклая оболочка множества:

Выпуклой оболочкой (соотв. *уравновешенной выпуклой оболочкой*) подмножества A векториого пространства E над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется наименьшее выпуклое (соотв. уравновешенное выпуклое) множество, содержащее A.

Замкнутой выпуклой оболочкой (соотв. *замкнутой уравновешенной выпуклой оболочкой*) подмножества A топологического векторного пространства E над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется наименьшее замкнутое выпуклое (соотв. замкнутое уравновешенное выпуклое) множество, содержащее A.

Конусы:

Конусом (с вершиной 0) в векторном пространстве E над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется множество C такое, что $\lambda x \in C$ для каждого $x \in C$ и каждого $\lambda > 0$. Конус C называется *заостренным* (соотв. *затупленным*), если $0 \in C$ (соотв. $0 \notin C$). Заостренный выпуклый конус называется *выступающим*, если он не содержит никакой прямой, проходящей через точку 0.

Отделение двух множеств гиперплоскостью:

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и H — гиперплоскость в E, заданная уравнением $f(x) = \alpha$ (где f — линейная форма на E, не равная тождественно нулю). Множества, определяемые соответственно неравенствами $f(x) \geqslant \alpha$ и $f(x) \leqslant \alpha$, называются *замкнутыми полупространствами*, определяемыми гиперплоскостью H; множества, определяемые соответственно неравенствами $f(x) > \alpha$ и $f(x) < \alpha$, называются *открытыми полупространствами*, определяемыми гиперплоскостью H. Говорят, что два непустых подмножества A, B векторного пространства E над $\mathbf{R}$ *отделяются* (соотв. *строго отделяются* гиперплоскостью H, если A содержится в одном из определяемых ею замкнутых (соотв. открытых) полупространств, а B — в другом.

Опорная гиперплоскость:

Говорят, что все точки некоторого подмножества M векторного пространства E над $\mathbf{R}$ находятся *по одну сторону* (соотв. *строго по одну сторону*) от гиперплоскости H, если M содержится в одном из определяемых ею замкнутых (соотв. открытых) полупространств.

Опорной гиперплоскостью множества $A \subset E$ называется гиперплоскость H, содержащая хотя бы одну точку из A и такая, что все точки множества A находятся по одну сторону от H.

Выпуклые тела:

Выпуклым телом в топологическом векторном пространстве над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется всякое замкнутое выпуклое множество, обладающее хотя бы одной внутренней точкой.

Определение локально выпуклого пространства:

Топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется *локально выпуклым*, если оно обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, образованной выпуклыми множествами.

Вещественным (соотв. *комплексным*) *пространством Фреше* называется полное метризуемое локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$).

Полунормы:

Пусть E — топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). *Полунормой* на E называется конечная числовая функция p, определенная на E и удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

($\mathrm{SN_I}$) Каковы бы ни были $x \in E$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ (соотв. $\lambda \in \mathbf{C}$), $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

($\mathrm{SN_{II}}$) Каковы бы ни были $x \in E$ и $y \in E$, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Пусть Γ — множество полунорм на E и $\mathfrak{G}$ — множество всех подмножеств из E, определяемых неравенствами вида $p(x) < \lambda$, где $p \in \Gamma$ и $\lambda > 0$. Множество $\mathfrak{B}$ пересечений всевозможных конечных наборов множеств из $\mathfrak{G}$ является фундаментальной системой выпуклых окрестностей нуля для топологии, согласующейся со структурой векторного пространства в E и называемой *топологией, определяемой множеством* Γ *полунорм*.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ III

Определение бочки и бочечного пространства:

Бочкой в локально выпуклом пространстве называется каждое *замкнутое поглощающее* уравновешенное выпуклое множество.

Локально выпуклое пространство E называется *бочечным*, если каждая бочка в E является окрестностью нуля.

Ограниченные множества:

Подмножество топологического векторного пространства называется *ограниченным*, если оно поглощается *каждой* окрестностью нуля.

Квазиполные пространства:

Топологическое векторное пространство E называется *квазиполным*, если каждое его *замкнутое* ограниченное подмножество является полным равномерным пространством (по равномерной структуре, индуцированной из E).

$\mathfrak{S}$ *топологии*:

Пусть E и F — топологические векторные пространства, $\mathfrak{S}$ — множество *ограниченных* подмножеств пространства E и $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F. $\mathfrak{S}$-топологией в $L(E, F)$ называется топология равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathbf{T}(M, V)$ для каждого $M \in \mathfrak{S}$ и каждой окрестности нуля V пространства F — множество тех $u \in L(E, F)$, для которых $u(M) \subset V$. Пересечения всевозможных конечных наборов множеств $\mathbf{T}(M, V)$ (где M пробегает $\mathfrak{S}$, а V — фундаментальную систему окрестностей нуля в F) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля $\mathfrak{S}$-топологии.

Если $\mathfrak{S}$ — множество всех *конечных* (соотв. *компактных*, *ограниченных*) подмножеств пространства E, то $\mathfrak{S}$-топология называется *топологией простой* (соотв. *компактной*, *ограниченной*) *сходимости*.

Если E и F — *нормированные* пространства, то топология ограниченной сходимости в $L(E, F)$ определяется *нормой* $\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВЫ IV

Векторные пространства в двойственности:

Пусть F и G — векторные пространства и $(x, y) \to B(x, y)$ — билинейная форма на $F \times G$. Говорят, что F и G *находятся в двойственности* (относительно B), если выполнены следующие два условия:

(D_I) Каково бы ни было $x \neq 0$ из F, существует $y \in G$ такое, что $B(x, y) \neq 0$.

(D_{II}) Каково бы ни было $y \neq 0$ из G, существует $x \in F$ такое, что $B(x, y) \neq 0$.

Вместо $B(x, y)$ пишут тогда $\langle x, y \rangle$.

Сопряженное; *алгебраическое сопряженное*:

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство. Его *алгебраическим сопряженным* называется векторное пространство E^* *всех* линейных форм на E (непрерывных или нет). *Сопряженным* к E называется подпространство E' пространства E^*, образованное *непрерывными* линейными формами на E. Пространства E и E' находятся в двойственности относительно канонической формы $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$. Сопряженное E' к E не рассматривается как топологическое векторное пространство, если только явно не указана его топология (которая может определяться различным образом при одном и том же локально выпуклом пространстве E).

Определение поляры:

Пусть F и G — два (вещественных или комплексных) векторных пространства в двойственности и A — произвольное подмножество пространства F. *Полярой* множества A в G называется множество A° всех $z \in G$ таких, что $\Re(\langle y, z \rangle) \leqslant 1$ для каждого $y \in A$. Если A — уравновешенное, то последнее равносильно выполнению неравенства $|\langle y, z \rangle| \leqslant 1$ для каждого $y \in A$. Если A — векторное подпространство пространства F, то A° — векторное подпространство пространства G, называемое *ортогональным* к A.

Слабые топологии:

Пусть F и G — два векторных пространства в двойственности. *Слабой топологией* в F, определяемой двойственностью между F и G, называется локально выпуклая топология $\sigma(F, G)$, определяемая семейством полуиорм $y \to |\langle y, z \rangle|$, где z пробегает G. Так же определяется слабая топология $\sigma(G, F)$ в G.

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство (топология которого именуется *исходной топологией*) и E' — его сопряженное. Топо-

логия $\sigma(E, E')$ называется *ослабленной топологией* в E (ассоциированной с исходной, которою она мажорируется). Топология $\sigma(E', E)$ называется *слабой топологией в* E'. Векторное пространство E', наделенное топологией $\sigma(E', E)$, называется *слабым* [1] *сопряженным* к E.

Топологии, согласующиеся с двойственностью:

Пусть F и G — два векторных пространства в двойственности. Говорят, что отделимая локально выпуклая топология $\mathfrak{T}$ в F *согласуется с двойственностью* между F и G, если каждая непрерывная (в топологии $\mathfrak{T}$) линейная форма на F может быть записана в виде $y \to \langle y, z\rangle$, где $z \in G$ (иными словами, если G отождествимо с сопряженным к F, наделенному топологией $\mathfrak{T}$).

Через $\tau(F, G)$ обозначается сильнейшая из топологий в F, согласующихся с двойственностью между F и G. Фундаментальную систему окрестностей нуля для $\tau(F, G)$ образуют поляры K°, где K пробегает множество всех уравновешенных выпуклых подмножеств из G, компактных в слабой топологии $\sigma(G, F)$.

Сильная топология:

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное. *Сильной топологией* в E' называется локально выпуклая топология, имеющая своей фундаментальной системой окрестностей нуля множество поляр B° всевозможных ограниченных множеств B из E. Пространство E', наделенное этой топологией, называется *сильным сопряженным* к E.

Второе сопряженное; рефлексивные пространства:

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и E' — его сопряженное. *Вторым сопряженным* к E называется сопряженное E'' к *сильному сопряженному* к E. E называется *рефлексивным*, если 1° каждая линейная форма на E', непрерывная в сильной топологии, записывается в виде $x^\circ \to \langle x, x'\rangle$, где $x \in E$; 2° поляры (в E) всевозможных множеств из E', *ограниченных* в сильной топологии, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для исходной топологии в E. Сильное сопряженное к сильному сопряженному к E отождествимо тогда с E, наделенным его исходной топологией.

ДИАГРАММА

различных типов топологических векторных пространств

Все пространства, заключенные в рамку, *отделимы* и *квазиполны*.